1	2

Aufgabe 1. (Punkte: 8)

Welche der folgenden reellen 3×3-Matrizen sind über $\mathbb{R}$ symmetrisch bzw. positiv definit? Kreuzen Sie bitte die zutreffenden Kästchen an.

	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$
symmetrisch	☒ Ja ☐ Nein	☒ Ja ☐ Nein	☐ Ja ☒ Nein	☐ Ja ☒ Nein
positiv definit	☐ Ja ☒ Nein	☒ Ja ☐ Nein	☒ Ja ☐ Nein	☐ Ja ☒ Nein

Punktevergabe je Spalte:
Für jedes richtig gesetzte "X"gibt es 1 Punkt;
Für jedes falsch gesetzte "X"gibt es 1 Punkt Abzug;
Begründungen sind nicht verlangt und werden nicht bewertet.

Begründungen (nicht verlangt)

- $(a_{ik}) = (a_{ki}) \Rightarrow A$ symmetrisch
  $a_{22} = -1 \Rightarrow A$ nicht positiv def. da $e_2^T A e_2 = -1 < 0$
- $(b_{ik}) = (b_{ki}) \Rightarrow B$ symmetrisch
  EW von B aus $\det(B - \lambda E) = (1-\lambda)[(4-\lambda)(3-\lambda)-4] =$
  $= (1-\lambda)[8 - 7\lambda + \lambda^2] \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = \frac{7 \pm \sqrt{49-32}}{2} > 0$!
- $c_{12} \neq c_{21},\ c_{23} \neq c_{32} \Rightarrow C$ nicht symmetrisch
  $x^T C x = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 > 0$ gem. Terme heben sich weg!
- $d_{13} \neq d_{31} \Rightarrow$ nicht symmetrisch
  $\det D = 1 \cdot (12-16) = -4 < 0 \Rightarrow$ mind. ein EW<0 $\Rightarrow$ nicht pos. def.!

1	2

Aufgabe 2. (Punkte: 8)

Gegeben seien die bezüglich des Standardskalarprodukts paarweise **orthogonalen** (nicht notwendig orthonormal) Vektoren $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^4$ mit $\|v_i\| > 0$ ($i \in \{1,2,3,4\}$).

1. Zeigen Sie: v_1 bis v_4 sind linear unabhängig.
2. Geben Sie die inverse Matrix von $T = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ an.

$v_1, \dots, v_n$ mit $v_i \perp v_k \ \forall i \neq k \Leftrightarrow \langle v_i, v_k \rangle = 0 \ \forall i,k$ und

$\langle v_i, v_i \rangle > 0 \ \forall i \Rightarrow$

Ansatz $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0 \ \Big| \langle \cdot, v_k \rangle \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underbrace{\langle v_i, v_k \rangle}_{= \delta_{ik} \cdot \langle v_i, v_i \rangle} = 0 \Rightarrow \lambda_k \langle v_k, v_k \rangle = 0$

$\Rightarrow \lambda_k = 0 \ \forall k \Rightarrow v_1 \dots v_n$ lu

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{- v_1^T -}{\langle v_1, v_1 \rangle} \\ \vdots \\ \dfrac{- v_n^T -}{\langle v_n, v_n \rangle} \end{pmatrix}$$

da das Prod. mit $T = (v_1, \dots, v_n)$ liefert

$$T^{-1} T = \left(\frac{v_i^T v_k}{\langle v_i, v_i \rangle} \right)_{i,k} = \left(\frac{\langle v_i, v_k \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} \right)_{i,k} = E$$

1	2

Aufgabe 3. (Punkte: 10)

Bestimmen Sie zu den Punkten $p_1 = (\frac{1}{2}, 22)$, $p_2 = (1, 11)$ und $p_3 = (2, 22)$ des $\mathbb{R}^2$ eine (Regressions-) Hyperbel der Bauart

$$f(x) = \frac{a}{x} + bx\ ,$$

so dass $\sum_{i=1}^{3}(f(x_i) - y_i)^2$ minimal wird.

---

gegeben $(\frac{1}{2}, 22)$, $(1, 11)$, $(2, 22)$

gesucht „Regressionshyperbel" $y = \frac{a}{x} + bx$ d.h. a, b mit

(1) $2a + \frac{1}{2}b - 22 = 0$

(2) $a + b - 11 = 0$ so, dass $\left\| \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ 1 & 1 \\ 1/2 & 2 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} 22 \\ 11 \\ 22 \end{pmatrix}}_{=:y} \right\|_2$ minimal ist.

(3) $\frac{1}{2}a + 2b - 22 = 0$

$\Leftrightarrow A^T A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A^T y$ (Normalengleichung)

$A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ 1 & 1 \\ 1/2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{21}{4} & 3 \\ 3 & \frac{21}{4} \end{pmatrix}$; $A^T y = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 22 \\ 11 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 \\ 66 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & 1 \\ 1 & \frac{7}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 22 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underline{\underline{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}} = \underbrace{\frac{16}{49-16}}_{=33} \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & -1 \\ -1 & \frac{7}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 22 \\ 22 \end{pmatrix} = \frac{16}{3} \begin{pmatrix} \frac{7}{2} - 2 \\ -2 + \frac{7}{2} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix}}}$

$\Rightarrow \underline{\underline{y = \frac{8}{x} + 8 \cdot x}}$

1	2

Aufgabe 4. (Punkte: 12)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix mit $A^2 = -A$.
Zeigen Sie:

1. Für jede zu A ähnliche Matrix B gilt ebenfalls $B^2 = -B$.
2. A hat nur Eigenwerte $\lambda \in \{-1, 0\}$.
3. A ist diagonalisierbar.
   Hinweis: Zeigen Sie, dass A keine Jordanblöcke der Länge 2 besitzt.

1.) $A^2=-A$ und B ähnlich zu A, d.h. $\exists T: T^{-1}AT=B$

$\Rightarrow \underline{\underline{B^2}} = T^{-1}A\underbrace{TT^{-1}}_{=E}AT = T^{-1}A^2T = T^{-1}(-A)T = -T^{-1}AT = \underline{\underline{-B}}$

2) $v\neq 0$ ist EV zu EW $\lambda \in \mathbb{C}$ $\Leftrightarrow$ $A\cdot v = \lambda v$ mit $v \neq 0$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow A^2 v &= A\cdot(Av) = A\cdot\lambda v = \lambda^2 v \\ -A\cdot v &= -\lambda v \end{aligned}\right\} \Rightarrow (\lambda^2+\lambda)v = 0 \text{ mit } v\neq 0$$

$\Rightarrow \lambda^2+\lambda = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda=0}}$ oder $\underline{\underline{\lambda=-1}}$

3) Betrachte $\dim(\mathrm{Kern}(A-\lambda E)^2) - \dim(\mathrm{Kern}(A-\lambda E)) = s_2$, d.h. die Anzahl der Jordanblöcke mindestens der Länge 2 zu den beiden EW $\lambda=0$ bzw $\lambda=1$

$$\left.\begin{aligned} &\underline{\text{EW}}\ \lambda=0 \Rightarrow \mathrm{Kern}\,A^2 = \mathrm{Kern}(-A) = \mathrm{Kern}\,A \Rightarrow s_2=0 \\ &\underline{\text{EW}}\ \lambda=-1 \Rightarrow \mathrm{Kern}(A+E)^2 = \mathrm{Kern}(A^2+2A+E) = \mathrm{Kern}(A+E) \Rightarrow s_2=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\nexists$ Jordanblöcke mit Länge $\geq 2 \Rightarrow A$ ist diagonalisierbar

1	2

Aufgabe 5. (Punkte: 12)

Gegeben sei die Quadrik $Q \in \mathbb{R}^3$ durch $q(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3 - x_3^2 + 4x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0$.

1. Bestimmen Sie mit der Hauptachsentransformation die Normalform von Q.
2. Zeigen Sie anhand der Quadriknormalform von Q, dass Q Geraden enthält.

---

1. $Q: \ q(x) = x^T \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} x + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}^T x = 0$

EW von A: $0 = \det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda(1-\lambda^2) - 4 + 4\lambda + 4 + 4\lambda =$

$= \lambda(9 - \lambda^2) \iff \lambda_1 = 0, \ \lambda_{2,3} = \pm 3$

normierte EV von A zu EW λ: $(A - \lambda E) \cdot e = 0$ mit $\|e\| = 1$

$\lambda_1 = 0: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow e_1 = \sigma \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ +2 \end{pmatrix} \wedge \|e_1\| = 1 \iff \sigma = \frac{1}{3}$

$\lambda_2 = 3: \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow e_2 = \sigma \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \|e_2\| = 1 \iff \sigma = \frac{1}{3}$ $\Bigg\} \Rightarrow$

A ist symmetrisch $\wedge$ 3 verschiedene EW $\Rightarrow e_1, e_2, e_3$ paarweise orthogonal $\Rightarrow e_3 = e_1 \times e_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Orth. Transf. $x = \mathcal{U} x'$ mit $\mathcal{U} = (e_2, e_3, e_1) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

in $x^T A x + 2b^T x + \overset{0}{\cancel{c}} = 0 \Rightarrow x'^T \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x' + \frac{2}{3} (2 \ -1 \ -2) \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} x = 0$

$\iff \underline{3x_1'^2 - 3x_2'^2 - 6x_3' = 0}$ (hyp. Paraboloid) bzw. $x_1'^2 - x_2'^2 - 2x_3 = 0$

---

2) Schnitt mit Ebene $x_3' = 0$ liefert $x_1'^2 - x_2'^2 = 0 = (x_1' - x_2')(x_1' + x_2')$

d.h. ein Geradenpaar; $x_2' = \pm x_1'$!

<u>Allgem.</u> Mit $x_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1'' + x_2'')$ und $x_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1'' - x_2'')$, $x_3' = x_3''$ $\Rightarrow$

$Q: \ 2x_1'' x_2'' - 2x_3'' = 0$ wird von Ebene $x_1'' = \text{const}$ bzw $x_2'' = \text{const}$ in Geraden geschnitten.

1	2

Aufgabe 6. (Punkte: 10)

Gegen sei die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

Bestimmen Sie die Jordan-Normalform J von A in Abhängigkeit von $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Hinweis: Die jeweilige Transformationsmatrix ist nicht explizit anzugeben.

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda)[(4-\lambda)(-1-\lambda)+6] =$$
$$= (1-\lambda)^2[2-3\lambda+\lambda^2] = (1-\lambda)^3(2-\lambda)$$

$\Rightarrow$ J besitzt sicher genau ein Jordankästchen der Länge 1 zu $\lambda=2$

Frage nach Jordankästchen zu $\lambda = 1$ (dreifacher EW) klären mit $\dim(\mathrm{Kern}(A-E)^k)$ $k=1$ bzw. $k=2$.

$$A-E = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \text{ sicher eine Nullzeile} \qquad (A-E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha\beta & 0 \\ 0 & 0 & 3\beta & 6\beta \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \text{ sicher zwei Nullzeilen}$$

Fallunterscheidung:

① $\alpha = 0 \wedge \beta = 0 \Rightarrow \dim \mathrm{Kern}(A-E) = 3 \wedge \dim \mathrm{Kern}(A-E)^2 = 3$

$\Rightarrow$ kein Jordankästchen der Länge ≥ 2

$\Rightarrow$ 3 Jordankästchen der Länge 1 !

② $\begin{pmatrix} \alpha = 0 \vee \beta = 0 \\ \wedge (\alpha,\beta) \neq (0,0) \end{pmatrix} \Rightarrow \dim \mathrm{Kern}(A-E) = 2 \wedge \dim \mathrm{Kern}(A-E)^2 = 3$

$\Rightarrow$ zwei Jordankästchen und zwar eines der Länge 2 und eines der Länge 1

③ $\alpha \neq 0 \wedge \beta \neq 0 \Rightarrow \dim \mathrm{Kern}(A-E) = 1$

$\Rightarrow$ ein Jordankästchen der Länge 3

$$① \Rightarrow J = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & \\ & 1 & & \\ 0 & & 1 & \\ & & & 2 \end{pmatrix} \quad ② \Rightarrow J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ 0 & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 2 \end{pmatrix} \quad ③ \Rightarrow J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \\ & 1 & 1 & 0 \\ & & 1 & \\ & 0 & & 2 \end{pmatrix}$$

1	2

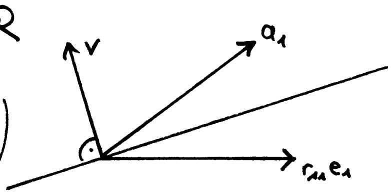
Aufgabe 7. (Punkte: 10)

Sei $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

1. Bestimmen Sie eine Matrix B der Gestalt $B = \begin{pmatrix} \beta & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und eine Spiegelungsmatrix $Q \in O(3)$ mit $A = QB$.
2. Wie erhällt man aus Q eine Drehmatrix $T \in SO(3)$, für die $T^T A$ eine Matrix der Gestalt $T^T A = \begin{pmatrix} \gamma & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ergibt?

---

1) $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} a_1, a_2, a_3 \end{pmatrix}$; $A = QR$



d.h. bestimme Q so, dass $Qa_1 = r_{11} \cdot e_1 = r_{11}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

Q soll eine Spiegelungsmatrix, d.h. Q ist Spiegelung an einer Ebene im $\mathbb{R}^3$ mit einem Normalenvektor $v = a_1 - r_{11}e_1$

Eine Spiegelungsmatrix, welche an einer Ebene mit Normalenvektor v spiegelt, ist

$Q = E - 2\frac{vv^T}{v^Tv}$ $\leadsto$ $R_1 = Q^TA$ $\quad \left(R_1 = \begin{pmatrix} r_{11} & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \right)$

Hier: $r_{11} = \|a_1\| = \sqrt{49+16+16} = \sqrt{81} = 9$

$\Rightarrow v = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\|v\| = 6$

$\Rightarrow Q = E - \frac{2}{36}\begin{pmatrix} 4 & -8 & -8 \\ -8 & 16 & 16 \\ -8 & 16 & 16 \end{pmatrix} = E - \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -4 & -4 \\ -4 & 8 & 8 \\ -4 & 8 & 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -8 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow R_1 = Q^TA = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -8 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

R_1 ist schon obere Dreiecksmatrix $\leadsto$ kein 2. Schritt erforderlich.

Aus einer Spiegelungsmatrix Q erhält man eine Drehmatrix T, wenn man

- 2 Zeilen oder 2 Spalten miteinander vertauscht
- eine Zeile oder eine Spalte mit -1 multipliziert
- alle Einträge mit -1 multipliziert $\qquad (Q \in \mathbb{R}^{3\times 3})$ ①

Damit $T^T A = \begin{pmatrix} \gamma & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$ gelten kann, kommen von den oben genannten

Möglichkeiten nur folgende in Frage:

- $T = -Q$
- $T = Q \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ (ungerade Anzahl von „-1"'en)
  $\hat{=}$ Spaltenmultiplikation
- $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} Q$ $\hat{=}$ Vertauschen der letzten beiden Zeilen
- $T = Q \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\hat{=}$ Vertauschen der letzten beiden Spalten

eine davon ②

(Dies sind natürlich nicht alle Möglichkeiten!)