1	2

Aufgabe 1. (Punkte: 6)

Bestimmen Sie für $n \in \mathbb{N}$ die Determinante der $n \times n$-Matrix T_n und begründen Sie Ihr Ergebnis.

$$T_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & -2 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n-1 \\ 0 & \dots & 0 & 1-n & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\left.\begin{array}{ll} T_1 = (1) & \Rightarrow \det T_1 = 1 \\ T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & \Rightarrow \det T_2 = 2 \end{array}\right\} \text{(Induktionsanfang)}$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det T_3 = 1 \cdot \det T_2 - (-2) \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 2 + 4 = 6$$

$\Rightarrow$ Vermutung $\det T_n = n!$ (Ind. voraussetzung)

$$T_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & & & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & 2 & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & -2 & 1 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & n-2 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2-n & 1 & n-1 & & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1-n & 1 & & n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & -n & & 1 \end{vmatrix}$$ (Induktionsschluss $n \to n+1$)

$$\Rightarrow \det T_{n+1} \underset{\uparrow}{=} 1 \cdot \det T_n - (-n) \cdot \underset{\uparrow}{n} \cdot \det T_{n-1} =$$

(Entwicklung nach letzter Zeile/Spalte) (Entwicklung der Unterdeterminante nach letzter Spalte/Zeile)

$$\underset{\uparrow}{=} n! + n^2 \cdot (n-1)! = n!(1+n) = (n+1)!$$

(Ind. voraus.)

2. Weg:

$$\det T_n \underset{\uparrow}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & -2 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n-1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1-n & 1 \end{pmatrix} = \dots \underset{\uparrow}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n-1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n \end{pmatrix} = n!$$

addiere 1. Zeile zur 2. Zeile!

addiere i-te Zeile zur (i+1)-ten Zeile rekursiv für $2 \leq i \leq n-1$

1	2

Aufgabe 2. (Punkte: 14)

Gegeben sei das Polynom $p(x) = x^8 - 1$.

1. Bestimmen Sie die Menge $N = \{x \in \mathbb{C} \mid p(x) = 0\}$ und deren Mächtigkeit $|N|$.
2. Zeigen Sie, dass die Nullstellenmenge N von p bezüglich Multiplikation eine Gruppe bildet.
3. Zeigen Sie, dass N zu $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ isomorph ist.
4. Geben Sie alle Untergruppen von N an.
5. Für welche $x \in N$ gilt, dass sie die ganze Gruppe $\langle x \rangle = N$ erzeugen?

---

1) $N = \{1 = e^{0\frac{\pi i}{4}}, e^{\frac{\pi i}{4}}, e^{2\frac{\pi i}{4}}, e^{3\frac{\pi i}{4}}, e^{4\frac{\pi i}{4}}, e^{5\frac{\pi i}{4}}, e^{6\frac{\pi i}{4}}, e^{7\frac{\pi i}{4}}\}$

$|N| = 8$

2) Wir zeigen: N ist Untergruppe von $(\mathbb{C}\setminus\{0\}, \cdot)$ mittels Untergruppenkriteriums

(0) $N \neq \emptyset$

(i) $a = e^{k\frac{\pi i}{4}}, b = e^{\ell\frac{\pi i}{4}}, 0 \leq k, \ell \leq 7 \Rightarrow a \cdot b = e^{(k+\ell)\frac{\pi i}{4}} \underset{e^{2\pi i}=1}{=} e^{\frac{\pi i}{4}(k+\ell \bmod 8)} \in N$

(ii) $a = e^{k\frac{\pi i}{4}}, 0 \leq k \leq 7 \Rightarrow a^{-1} = e^{(8-k)\frac{\pi i}{4}} \in N$

3) $\varphi : (N, \cdot) \to (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, +)$, $e^{k\frac{\pi i}{4}} \mapsto [k]$ $(0 \leq k \leq 7)$

φ offensichtlich bijektiv

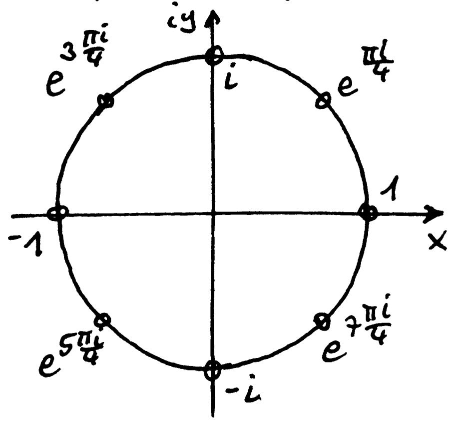
Homomorphismuseigenschaft folgt direkt aus den Potenzgesetzen für $\mathbb{C}$ und der Addition mod 8.

$\varphi(e^{k\frac{\pi i}{4}} \cdot e^{\ell\frac{\pi i}{4}}) = \varphi(e^{(k+\ell)\frac{\pi i}{4}}) = [k+\ell] = [k] + [\ell] = \varphi(e^{k\frac{\pi i}{4}}) + \varphi(e^{\ell\frac{\pi i}{4}})$

4) triviale Untergruppen $\{1\}$ und N

sonst: $\{1, -1\}$ und $\{1, i, -1, -i\}$

Beachte: Ordnung der Untergruppe teilt Gruppenordnung!



5) $N = \langle e^{\pi i/4} \rangle = \langle e^{3\frac{\pi i}{4}} \rangle = \langle e^{5\frac{\pi i}{4}} \rangle = \langle e^{7\frac{\pi i}{4}} \rangle$

$\Rightarrow e^{\frac{\pi i}{4}}, e^{3\frac{\pi i}{4}}, e^{5\frac{\pi i}{4}}, e^{7\frac{\pi i}{4}}$ erzeugen N

3) alternativ: $\mathbb{Z} \to N$ mit $\varphi(k) = e^{\frac{\pi i}{4}(k \bmod 8)}$ ist Epimorphismus mit

$\operatorname{Kern} \varphi = 8\mathbb{Z}$ Isomorphiesatz $\Rightarrow \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \cong N$

1	2

Aufgabe 3. (Punkte: 5)

Gegeben seien die linear unabhängigen Vektoren $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$.

1. Warum gibt es genau eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ mit

$$f(a_1) = 0\,, \quad f(a_2) = 0\,, \quad f(a_3) = a_1\,, f(a_4) = a_2\ ?$$

2. Bestimmen Sie je eine Basis für den Kern und das Bild der linearen Abbildung f.

---

1) Die linear unabhängigen Vektoren $a_1, \dots, a_4$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^4$
Ein lineare Abbildung ist durch Vorgabe der Bilder der Basisvektoren eindeutig bestimmt.

$$\left(\text{zu } x \in \mathbb{R}^4\ \exists\, \lambda_i : \sum_{i=1}^{4} \lambda_i a_i = x \Rightarrow f(x) = f\Big(\sum_{i=1}^{4} \lambda_i a_i\Big) \overset{\text{linearität}}{=} \sum_{i=1}^{4} \lambda_i f(a_i)\right)$$

<u>alternativ:</u> über Koordinatenvektoren zur Basis $\{a_1, \dots, a_4\}$

$$f: y = A \cdot x \text{ mit } \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \text{ ist eindeutig bestimmt.}$$

2) Basis Kern$(f) = \{a_1, a_2\}$, Basis Bild$(f) = \{a_1, a_2\}$

$$\mathrm{Kern}(f) = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid f(x) = 0\} = \{x = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i a_i \mid \underbrace{\lambda_3 a_1 + \lambda_4 a_2 = 0}_{\text{lin. unabh.}}\} = \{\sum_{i=1}^{4} \lambda_i a_i \mid {\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \atop \lambda_3 = \lambda_4 = 0}\}$$
$$= \mathrm{span}(a_1, a_2)$$

$$\mathrm{Bild}(f) = \{y \in \mathbb{R}^4 \mid \exists x \in \mathbb{R}^4 : f(x) = y\} \underset{x = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i a_i}{=} \{y \in \mathbb{R}^4 \mid \exists \lambda_1, \dots, \lambda_4 : \underbrace{\lambda_3 a_1 + \lambda_4 a_2 = y}_{\text{lin unabh.}}\} =$$
$$= \mathrm{span}(a_1, a_2)$$

<u>alternativ</u>

$\mathrm{Rg}\,A = \dim \mathrm{Bild}(f) = 2 \Rightarrow \dim \mathrm{Kern}(f) = 2$ und

$\mathrm{Kern}(A) = \mathrm{span}(e_1, e_2) \Rightarrow \mathrm{span}(a_1, a_2) = \mathrm{Kern}(f)$

Basis $\mathrm{Bild}(A) = \{e_1, e_2\} \Rightarrow \{a_1, a_2\}$ Basis $\mathrm{Bild}(f)$

1	2

Aufgabe 4. (Punkte: 10)

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $a, b, c, d \in V$. Für welche der folgenden Aussagen A gilt:

$$A \quad \Longrightarrow \quad span(a, b) = span(c, d) \ ?$$

Aussage A	richtig	falsch
$a, b \in span(c, d) \ \wedge \ c, d$ linear unabhängig.	☐	☒
$\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}: \ c = \lambda_1 a + \lambda_2 b \ \wedge \ \exists \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}: \ d = \mu_1 a + \mu_2 b$	☐	☒
$a, b \in span(c, d) \ \wedge \ c, d \in span(a, b)$	☒	☐
$a, b \in span(c, d) \ \wedge \ dim(span(c, d)) = 2$	☐	☒
$a, b \in span(c, d) \ \wedge \ dim(span(a, b)) = 2$	☒	☐
Je drei der vier Vektoren a, b, c, d sind linear abhängig.	☐	☒
$dim(span(c, d)) = 2 \ \wedge \ dim(span(a, b)) = 2$	☐	☒
c, d sind nichttriviale Linearkombinationen der linear abhängigen Vektoren a und b.	☐	☒
c, d sind nichttriviale Linearkombinationen von $a, b \ \wedge \ dim(span(a, b)) = 1$	☒	☐
a, b, c, d sind linear abhängig	☐	☒

Punktevergabe je Zeile:
Für jedes richtig gesetzte "X"gibt es 1 Punkt.
Für jedes falsch gesetzte "X"gibt es 1 Punkt Abzug.
Begründungen sind nicht verlangt und werden nicht bewertet.

1	2

Aufgabe 5. (Punkte: 10)

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & -5 & -8 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ einer linearen Abbildung $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ x & \mapsto & Ax \end{cases}$.

1. Bestimmen Sie $Kern(f)$.
2. Bestimmen Sie $dim(Bild(f))$ und eine Basis von $Bild(f)$.
3. Zeigen Sie, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A ist.
4. Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

---

1) $Kern(f) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = 0\}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -4 & 0 \\ -1 & -5 & -8 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -4 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{-8} & \cancel{-12} & \cancel{0} \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = 2\mu \\ x_2 = -3\mu \\ x_1 = 3(-3\mu)+4\cdot 2\mu = -\mu \end{array} \Rightarrow x = \mu\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow Kern(f) = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = \mu\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}\right\} \Rightarrow$$

2) $dim\, Bild(f) = 3 - \underbrace{dim(Kern(f))}_{=1} = 2$ und z.B.

$Basis_{Bild(f)} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$ oder z.B. zwei andere Spalten von A.

3) $v \neq 0$ ist EV von A zum EW $\lambda \Leftrightarrow Av = \lambda v$ mit $v \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & -5 & -8 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3+4 \\ -1-5+8 \\ 4-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +2 \\ +2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (\Rightarrow \text{EW } \lambda = 2\,!)$$

4) $$\chi_A(\lambda) = det(A - \lambda E) = det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 & -4 \\ -1 & -5-\lambda & -8 \\ 0 & 4 & 6-\lambda \end{pmatrix} = \quad \begin{pmatrix} \text{Entwicklung nach} \\ \text{1. Spalte} \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\cdot[\underbrace{-(5+\lambda)(6-\lambda)+32}_{=2-\lambda+\lambda^2}] - (-1)\cdot[-3(6-\lambda)+16] =$$

$$= 2 - 3\lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3 - 2 + 3\lambda = \lambda^2(2-\lambda) \Rightarrow \text{EW } \lambda_{1,2} = 0 \wedge \lambda_3 = 2$$

zugehörige EV aus 1) und 3):

$$\lambda_{1,2} = 0 \Rightarrow v_{1,2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \lambda_3 = 2 \Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

alternativ: $spur\, A = 1-5+6 = \underbrace{\lambda_1}_{=0} + \underbrace{\lambda_2}_{=2} + \lambda_3 = 2 \Rightarrow \lambda_3 = 0$

1	2

Aufgabe 6. (Punkte: 10)

Sei $A \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ eine Matrix mit sechsfachem Eigenwert $\lambda = 1$ und dreidimensionalem Eigenraum.

1. Begründen Sie, dass es eine zu A ähnliche Matrix J in Jordannormalform gibt.
2. Die zu A gehörende Jordanmatrix J kann von unterschiedlicher Gestalt sein. Geben Sie bis auf Permutation der Blöcke alle Möglichkeiten an.
3. Sei nun $dim(Kern(A-E)^2) = 5$. Wie sieht dann die Jordanmatrix J zu A aus?
4. Im Gegensatz zum Aufgabenteil 3 sei nun $(A-E)^2 = 0 \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ die Nullmatrix. Wie sieht dann die Jordanmatrix J zu A aus?
5. Bestehe J nun aus drei 2×2-Jordan-Blöcken. Bestimmen Sie A^3 als Linearkombination von A und E.

---

1) $\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)^6$ zerfällt in Linearfaktoren $\Rightarrow \exists J$

2) Wegen $\mathrm{Dim}(\mathrm{Kern}(A-E)) = 3 \Rightarrow J$, besteht aus 3 Jordanblöcken $\Rightarrow$

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & 0 & & \\ & & 1 & 1 & & \\ & & & 1 & 1 & \\ 0 & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} ; \quad J_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & 1 & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & 1 & \\ 0 & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} ; \quad J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & \\ & 1 & & & 0 & \\ & & 1 & 1 & & \\ & & & 1 & & \\ 0 & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

2 Einer-, 1 Vierer Block; 1 Einer, 1 Zweier & 1 Dreier Block; 3 Zweier Blöcke

3) Für $\mathrm{Dim}(\mathrm{Kern}(A-E)^2) = 5$ gilt $s_2 = \mathrm{Dim}(\mathrm{Kern}(A-E)^2) - \mathrm{Dim}(\mathrm{Kern}(A-E)) = 2$

d.h. J besitzt zwei Blöcke mindestens der Länge 2 $\Rightarrow J = J_2$

4) Aus $(A-E)^2 = 0 \Rightarrow \mathrm{Dim}(\mathrm{Kern}(A-E)^2) = 6 \Rightarrow s_2 = \dots = 3 \Rightarrow J = J_3$

5) 1. Weg: Sei $J = T^{-1}AT \Rightarrow A = TJT^{-1} \Rightarrow A^3 = (TJT^{-1})^3 = TJ^3T^{-1} =$

$$= T \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & & & & \\ & 1 & & & 0 & \\ & & 1 & 3 & & \\ & & & 1 & & \\ 0 & & & & 1 & 3 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}}_{= 3J - 2E} T^{-1} = 3TJT^{-1} - 2TET^{-1} = 3A - 2E$$

2. Weg: Im Fall $J = J_3 \Rightarrow s_2 = 3 \Rightarrow \mathrm{Dim}\,\mathrm{Kern}(A-E)^2 = 6 \Rightarrow (A-E)^2 = 0 \Rightarrow$

$A^2 = 2A - E \Rightarrow A^3 = 2A^2 - E\cdot A = 4A - 2E - A = 3A - 2E$

Aufgabe 7. (Punkte: 8)

1	2

Gegeben seien die Vektoren $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

1. Zeigen Sie, dass die Vektoren a_1, a_2, a_3 linear unabhängig und bezüglich des Standardskalarprodukts paarweise orthogonal sind.
2. Finden Sie einen Vektor a_4 der Länge 2, welcher gleichzeitig auf a_1, a_2 und a_3 senkrecht steht.
3. Bezüglich der Standardbasis sei der Vektor $x^T = (7, 5, 12, 12)$ gegeben. Bestimmen Sie den Koordinatenvektor von x in der Basis $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$.

---

1) ~~Ortho:~~ Es gilt $a_i \perp a_j$ wegen $a_i^T a_j = 0$ für $i \neq j$ und $a_i^T a_i = 4 \neq 0$

<u>1. Weg:</u> $\Rightarrow$ a_1, a_2, a_3 sind linear unabhängig. (Satz der Vorlesung)

<u>2. Weg:</u> Ansatz $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0$ (für lin. Unabhängigkeit)

<u>2.1.</u> $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

vollen (Spalten) rang

<u>oder</u>

<u>2.2.</u> Mult mit a_j liefert $\lambda_j a_j^T a_j = 0 \Leftrightarrow \lambda_j = 0$ für $1 \leq j \leq 3$.

2) <u>1. Weg:</u> Suche $a_4 \neq 0$, dass $a_1^T a_4 = a_2^T a_4 = a_3^T a_4 = 0 \wedge a_4^T a_4 = 4 \Leftrightarrow$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $a_{44} = \mu$, $a_{43} = -\mu$, $a_{42} = -\mu$, $a_{41} = \mu$ $\Rightarrow a_4 = \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}$

$\wedge\ a_4^T a_4 = 4 \Leftrightarrow \mu^2 \cdot 4 = 4 \Leftrightarrow \mu = \pm 1 \Rightarrow a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ <u>oder</u> $a_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

<u>2. Weg:</u> Ergänze a_1, a_2, a_3 um $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und orthogonalisiere

Ansatz: Suche $\lambda_1, \dots, \lambda_3 \neq 0$, dass $\tilde{a}_4 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + e_1 \perp a_i$ $(1 \leq i \leq 3)$

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{a}_4^T a_1 = 0 \Rightarrow 0 = \lambda_1 \cdot 4 + 1 \Rightarrow \lambda_1 = -1/4 \\ \tilde{a}_4^T a_2 = 0 \Rightarrow 0 = \lambda_2 \cdot 4 + 1 \Rightarrow \lambda_2 = -1/4 \\ \tilde{a}_4^T a_3 = 0 \Rightarrow 0 = \lambda_3 \cdot 4 + 1 \Rightarrow \lambda_3 = -1/4 \end{array}\right\} \Rightarrow \tilde{a}_4 = -\frac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3) + e_1 =$$

$$= -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{= a_4} \Rightarrow a_4!$$

3) **1. Weg:** $\sum_{i=1}^{4} \lambda_i a_i = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix} \quad | \cdot a_j \quad \Rightarrow \quad \lambda_j \cdot 4 = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}^T \cdot a_j \quad \Rightarrow$

$\lambda_1 = \frac{1}{4}(7+5-12-12) = -3 \quad ; \quad \lambda_2 = \frac{1}{4}(7-5+12-12) = \frac{1}{2}$

$\lambda_3 = \frac{1}{4}(7+5+12+12) = 9 \quad ; \quad \lambda_4 = \frac{1}{4}(7-5-12+12) = \frac{1}{2}$ (bzw $-\frac{1}{2}$)

2. Weg: löse das LGS $\sum_{i=1}^{4} \lambda_i a_i = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 12 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 19 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 19 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 17 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 19 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \lambda_4 = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda_3 = \frac{18}{2} = 9 \wedge \lambda_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \wedge$$

$$\lambda_1 = 7 - \frac{1}{2} - 9 - \frac{1}{2} = -3$$

$$\Rightarrow x_A = \begin{pmatrix} -3 \\ 1/2 \\ 9 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

1	2

Aufgabe 8. (Punkte: 12)

Gegeben sei die Matrix

$$D = \beta \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & \alpha \end{pmatrix} .$$

1. Begründen Sie, dass D für $\alpha = 2$ und $\beta = \frac{1}{3}$ eine Drehmatrix ist.

Sei nun $\alpha = 2$ und $\beta = \frac{1}{3}$.

2. Berechnen Sie die Drehachse v und den Betrag $|\varphi|$ des Drehwinkels φ von D.
   (Falls Sie $\chi_D(\lambda)$ benötigen sollten, verwenden Sie bitte: $\chi_D(\lambda) = 1 - 2\lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3$)
3. Für welche $k \in \mathbb{N}$ ist D^k eine Achsendrehung D_π um den Winkel π?
4. Sei S eine Spiegelung senkrecht zur Drehachse (Spiegelebene durch den Ursprung und orthogonal zur Drehachse v).
   Geben Sie eine Matrix für $S \cdot D_\pi$ an? (Rechnung nicht erforderlich und wird nicht bewertet!)

---

1) Für $\alpha = 2$ ist 3. Spalte (Zeile) orthogonal zu den beiden ersten

$D = (d_1, d_2, d_3) \Rightarrow d_i^T d_j = 0, \ i \neq j$

Für $\beta = \frac{1}{3}$ sind die Spalten (Zeilen) normiert $(d_i^T d_i = 1)$ und $\det D = +1$

2) Drehachse v : EV von D zum EW $\lambda = +1$ (bzw Menge der Fixpunkte $Dv = v$)

$(D - E)v = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} v = 0 \Rightarrow v = \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mu \in \mathbb{R}$

Achse durch 0

Drehwinkel φ

- 1. Weg über EW von D

$\chi_D(\lambda) = \det(D - \lambda E) = \frac{1}{27} \det \begin{pmatrix} 2-3\lambda & -1 & 2 \\ 2 & 2-3\lambda & -1 \\ -1 & 2 & 2-3\lambda \end{pmatrix} = \frac{1}{27}[(2-3\lambda)^3 + 7 + 6(2-3\lambda)] =$

$= \frac{1}{27}[8 - 36\lambda + 54\lambda^2 - 27\lambda^3 + 7 + 12 - 18\lambda] = \frac{1}{27}[27 - 54\lambda + 54\lambda^2 - 27\lambda^3] =$

$= 1 - 2\lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3 \stackrel{!}{=} 0$ Drehung hat EW $\lambda = +1 \Rightarrow$

$(\lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda - 1) : (\lambda - 1) = \lambda^2 - \lambda + 1 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot i$

$\underline{\lambda^3 - \lambda^2}$

$-\lambda^2 + 2\lambda$

$\underline{-\lambda^2 + \lambda}$

$\lambda - 1$

$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{2}, \ \sin\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{3} \Rightarrow |\varphi| = 60^\circ$

- 2. Weg mit Formel $\cos\varphi = \frac{1}{2}(\text{spur } D - 1) = \frac{1}{2}(2-1) = \frac{1}{2} \Rightarrow |\varphi| = 60^\circ$

- <u>3. Weg</u> über Bild eines zur Drehachse orthogonalen Vektors

Wähle z.B. $p = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \perp v \Rightarrow p' = Dp = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{p^T p'}{\|p\|\|p'\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow |\varphi| = 60^\circ$

- <u>4. Weg</u> gemäß Satz der Vorlesung

Wähle z.B. $p = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \perp v \Rightarrow$ Transformation

$\mathcal{U} = \left(\frac{v}{\|v\|}, \frac{p}{\|p\|}, \frac{v \times p}{\|v\|\|p\|} \right) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{U}^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$ und

$\mathcal{U}^T D \mathcal{U} = \mathcal{U}^T \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \mathcal{U} = \mathcal{U}^T \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ Drehung um x-Achse

$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{2}, \sin\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{3} \Rightarrow |\varphi| = 60^\circ$

3) $\varphi = 60^\circ \Rightarrow D^k = D_\pi \Leftrightarrow k = 3 + 6 \cdot l, \; l \in \mathbb{N}_0$

4) $S \cdot D_\pi = -E_3$

1) $E=(-3,0)$, da Δ_1 und Δ_2 rechtwinklig mit $|\overline{AB}|=|\overline{AD}|=4$ und $|\overline{AE}|=|\overline{BC}|=3$ sowie $\measuredangle ABC = 90° = \measuredangle DAE \Rightarrow E \in x$-Achse

2) Ansatz: $\gamma(x) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} x + t$ $\qquad \gamma(A) = D \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = t$

↑ Spiegelungsmatrix in $\mathbb{R}^2$ da Δ_1 und Δ_2 gegensinnig!

$\gamma(B) = A \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \underline{\gamma(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}}$ $\quad$ Probe $\gamma(C) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} = E$

3) <u>1. Weg:</u> geometrisch anschaulich

Bei einer Gleitspiegelung (speziell Achsenspiegelung) liegen die Mittelpunkte der Punkt-Bildpunkte-Paare $(x, \gamma(x))$ auf der Achse

$\Rightarrow g = M_{\overline{BA}} M_{\overline{AD}}$ und $s = \overrightarrow{M_{\overline{BA}} M_{\overline{AD}}}$, da die Strecke $\overline{AB}$ auf die Strecke $\overline{DA}$ und somit $M_{\overline{BA}}$ auf $M_{\overline{AD}}$ abgebildet wird.

<u>alternativ:</u> $s = \overrightarrow{\tilde{A} D}$ mit Spiegelpunkt $\tilde{A}$ von A an g.

<u>2. Weg:</u> rechnerisch Ansatz für Fixgerade:

$g: x = \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \gamma(g): x' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\text{neuer Aufpunkt}} + \lambda \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -v \\ -u \end{pmatrix}}_{\text{neue Richtung}}$

$g \equiv \gamma(g) \Leftrightarrow (1)\ \exists\, u, v, \mu: \overbrace{\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}}^{\neq 0} = \mu \cdot \begin{pmatrix} -v \\ -u \end{pmatrix} \Leftrightarrow u = \mu^2 u,\ v = \mu^2 v$ mit $\mu = \pm 1$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \sigma \in \mathbb{R}$ für $\mu = +1$ ($\mu = -1$ liefert Richtung $\perp g$)

(2) $\exists\, w, \lambda: \begin{pmatrix} 0 \\ -w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = -w,\ w = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{g: x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$ und $\begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 4-w \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{s = \begin{pmatrix} -2 \\ +2 \end{pmatrix}}$