Letztes Mal: Basen von V

(i) $\operatorname{span}(v_1, \dots, v_n) = V$
(ii) $(v_1, \dots, v_n)$ linear unabh.

Zielrichtung: für endl. erzeugte VR haben alle Basen die gleiche Länge

Wichtiger Baustein: Austauschlemma
Sei $(v_1, \dots, v_n)$ Basis von V und $w \in V \setminus \{0\}$ dann ex ein $i \in \{1, \dots, n\}$ so daß $(v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n, w)$ Basis von V ist.

Austauschsatz für Basen:

Sei $(v_1 \dots v_n)$ eine Basis von V

sei $(w_1 \dots w_r)$ linear unabhängig $w_i \in V$ für alle i

(i) $r \leq n$

(ii) Es gibt Indizes $i_1 \dots i_r \in \{1, \dots, n\}$ sodass wenn man $v_{i_1} \dots v_{i_r}$ aus der Basis weglößt und $w_1 \dots w_r$ hinzufügt wieder eine Basis entsteht.

Bew: (Induktion über r)

Induktionsanker: $r=0$ trivialerweise wahr

Induktionsschluss: „Aussage wahr für $r-1$ $\Rightarrow$ Aussage wahr für r"

Sei also $r \geq 1$ und der Satz für $r-1$ bereits bewiesen

Sei $w_1, \dots, w_r$ linear unabhängig

$\Rightarrow w_1 \dots w_{r-1}$ linear unabhängig

Induktvor.

$\Rightarrow$ Nach Umnummerierung der v_i (oBdA) ist $(w_1 \dots w_{r-1}, v_r \dots v_n)$ Basis

$\Rightarrow w_r \in \operatorname{span}(w_1 \dots w_{r-1}, v_r \dots v_n)$

$\Rightarrow w_r = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_{r-1} w_{r-1} + \lambda_r v_r + \dots + \lambda_n v_n$

λ_i, $i \in \{r \dots n\}$ ist $\neq 0$, oBdA $i=r$

c mind ein

Argument aus Austauschlemma

$\Rightarrow v_r = -\frac{\lambda_1}{\lambda_r} w_1 \dots - \frac{\lambda_{r-1}}{\lambda_r} w_{r-1} + \frac{1}{\lambda_r} w_r - \frac{\lambda_{r+1}}{\lambda_r} v_r \dots$

$\Rightarrow (w_1 \dots w_r, v_{r+1} \dots v_n)$ ist Basis von V

Noch zu zeigen: $r \leq n$ (es reicht $r = n+1$ zum Widerspruch zu führen)

Zeige $r-1 \neq n$

Wenn doch $(w_1, \dots, w_{r-1})$ Basis wegen (ii)

$\Rightarrow w_r \in \operatorname{span}(w_1, \dots, w_{r-1})$

$\Rightarrow$ ↯ zur linearen Unabhängigkeit von $w_1, \dots, w_r$

Satz Alle Basen eines endl. erzeugten VR haben gleiche Mächtigkeit.

Bew Sei $(v_1, \dots, v_n)$ Basis von V
sei $(w_1, \dots, w_m)$ Basis von V

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Austauschsatz: } \left.\begin{array}{l} (v_1, \dots, v_n) \text{ Basis} \\ (w_1, \dots, w_m) \text{ lin. unabh.} \end{array}\right\} m \le n \\[2em]
\text{Austauschsatz: } \left.\begin{array}{l} (w_1, \dots, w_m) \text{ Basis} \\ (v_1, \dots, v_n) \text{ lin. unabh.} \end{array}\right\} n \le m
\end{array}\right\} \boxed{n = m}$$

Def: Sei $(v_1, \dots, v_n)$ Basis von V.
Dimension von V ist n. $\dim(V) = n$.

Beispiel für nicht endl. Vektorraum

z.B. $\mathbb{R}[x]$ $\quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots$

Basis $(1, x, x^2, x^3, x^4 \ldots\ldots)$ unendlich groß

ABER abzählbar
Mächtigkeit der Basis
$|\mathbb{N}|$

dimension von $\mathbb{R}[x]$ ist
„abzählbar unendlich"

Pragmatisch im $\mathbb{R}^3$

gleichwertig: (i) v_1, v_2, v_3 ist Basis

(ii) v_1, v_2, v_3 line unabh.

(iii) $\operatorname{span}(v_1, v_2, v_3) = \mathbb{R}^3$

(iv) $v_1, v_2, v_3, 0$ liegen nicht in einer Ebene

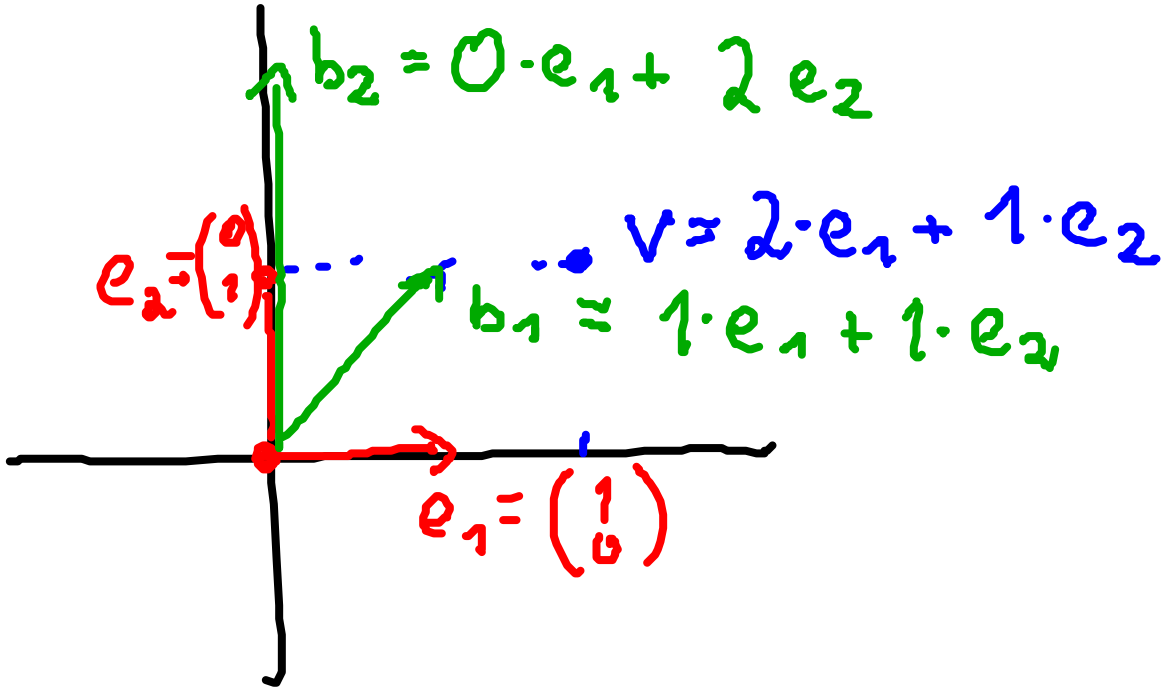
im $\mathbb{R}^n$ gleichwertig:

(i) $v_1 \dots v_n$ ist Basis

(ii) $v_1 \dots v_n$ ist linear unabh.

(iii) $\operatorname{span}(v_1 \dots v_n) = \mathbb{R}^n$

Basiswechsel: Beispiel im $\mathbb{R}^2$



Darstellung von v in Basis b_1, b_2

gesucht α, β mit

$$\alpha b_1 + \beta b_2 = v$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ 2}}{\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \underset{\substack{\uparrow \\ -\frac{1}{2}}}{\beta} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4 Lineare Abbildungen

Zur Erinnerung
Gruppenhomomorph.
$f: G \to H$
$f(a \circ b) = f(a) \circ f(b)$

Def Seien V, W beides K-Vektorräume.

$f: V \to W$ heißt <u>lineare</u> Abbildung, wenn

(i) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$ für alle $v_1, v_2 \in V$

(ii) $f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)$ für alle $v \in V, \lambda \in K$

Beispiel: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \to \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist lin. Abb.

Bew: $f\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} \lambda_1+\mu_1 \\ \lambda_2+\mu_2 \\ \lambda_3+\mu_3 \end{pmatrix}\right) =$

$$= (\lambda_1+\mu_1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (\lambda_2+\mu_2)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + (\lambda_3+\mu_3)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu_2\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= f\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix}\right)$$

Analog:

$$f\left(\lambda \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}\right) = \lambda \cdot f\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}\right)$$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\qquad v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \mapsto \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$$

ist lineare Abb

Bew Rechnung analog zum Beispiel

Elementare Eigenschaften: f sei lineare Abb. $V \to W$

(i) $f(v-w) = f(v) - f(w)$

Bew: $f(v-w) = f(v + (-1)w) = f(v) + f((-1)w)$

$= f(v) + (-1) \cdot f(w) = f(v) - f(w)$

(ii) $f(0_V) = 0_W$

$\boxed{0 = v - v}$

Bew: $f(0_v) = f(v-v)$

$= f(v) - f(v) = 0_W$

(iii) $f(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \ldots + \lambda_n f(v_n)$

Bew: $f(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n) = f(\lambda_1 v_1) + \ldots + f(\lambda_n v_n)$

$= \lambda_1 f(v_1) + \ldots + \lambda_n f(V_n)$

Satz V, W endl. erz. Vektorräume

$(v_1 \dots v_n)$ sei Basis von V, $w_1 \dots w_n \in W$

$$\left.\begin{array}{l} f: V \to W \\ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \mapsto \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n \end{array}\right\} \text{ ist linear.}$$

λ_i sind eindeutig

Bew: Sei $a, b \in V$ mit $a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ und $b = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i$

(i) $f(a+b) = f\left(\sum \lambda_i v_i + \sum \mu_i v_i\right)$
$= f\left(\sum (\lambda_i + \mu_i) v_i\right) = \sum (\lambda_i + \mu_i) \cdot w_i$
$= \sum \lambda_i w_i + \sum \mu_i w_i = f(a) + f(b)$

(ii) $f(\lambda \cdot a) = f\left(\lambda \cdot \sum \lambda_i v_i\right) = f\left(\sum \lambda \cdot \lambda_i v_i\right) = \sum \lambda \cdot \lambda_i w_i$
$= \lambda \cdot \sum \lambda_i w_i = \lambda \cdot f(a)$