Letztes Mal:

$f: V \to W$ lineare Abb

$\mathrm{Kern}(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0\} \subseteq V$

$\mathrm{Bild}(f) = \{f(v) \mid v \in V\} \subseteq W$

- Kern(f) ist UVR von V
- Bild(f) ist UVR von W

Nächstes Teilziel: Dimensionssatz

$f$ sei lineare Abb. $V \to W$

$V, W$ endlich erzeugt

$$\boxed{\dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f)) = \dim(V)}$$

$f$ sei lineare Abb.

**Lemma** $f(x) = f(y)$ g.d.w. $x - y \in \mathrm{Kern}(f)$

**Bew:** „$\Rightarrow$" $f(x)=f(y) \Rightarrow f(x)-f(y)=0$

$\Rightarrow f(x-y) = 0 \Rightarrow x-y \in \mathrm{Kern}(f)$

„$\Leftarrow$" $x-y \in \mathrm{Kern}(f) \Rightarrow f(x-y) = 0$

$\Rightarrow f(x)-f(y)=0 \Rightarrow f(x)=f(y)$

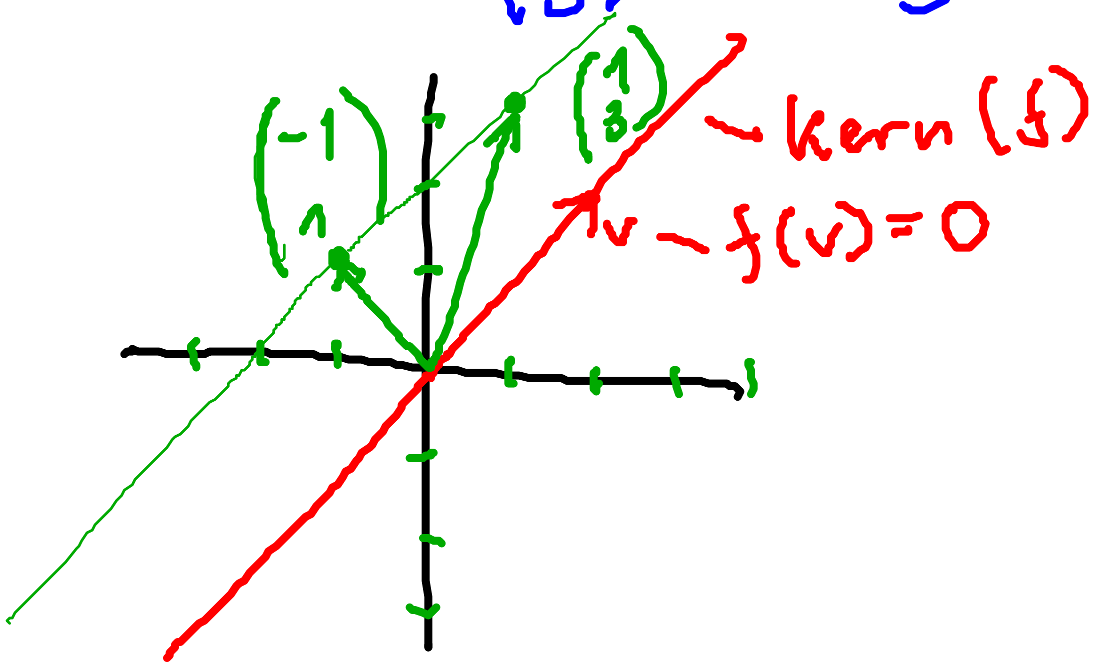
---

Bsp $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x-y$

$\mathrm{Bild}(f) = \mathbb{R}^1$

$\mathrm{Kern}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \, x-y=0 \right\}$




$f\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1-1 = -2$

$f\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 1-3 = -2$

**Satz** Sei $V$ endl. erzeugter Vektorraum
$f: V \to W$ sei lineare Abbildung. Dann gilt

$$\boxed{\dim(\underbrace{\mathrm{Kern}(f)}_{\subseteq V}) + \dim(\underbrace{\mathrm{Bild}(f)}_{\subseteq W}) = \dim(V)}$$

**Bew:** Sei $v_1 \dots v_m$ Basis von Kern$(f)$
Sei $w_1 \dots w_k$ Basis von Bild$(f)$
Sei $u_1 \dots u_k \in V$ so dass $f(u_i) = w_i$ für alle $i$

Zeige: $(v_1 \dots v_{\underbrace{m}_{=\dim(\mathrm{Kern})}}, u_1 \dots u_{\underbrace{k}_{=\dim(\mathrm{Bild})}})$ ist Basis von $V$

Zeige: (i) $\mathrm{span}(v_1 \dots v_m, u_1 \dots u_k) = V$
(ii) $v_1 \dots v_m, u_1 \dots u_k$ sind linear unabhängig

(i) Zeige $v_1 \dots v_m, u_1 \dots u_k$ spannt $V$ auf

Sei $v \in V$ ; $f(v) = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_k w_k$ (weil $w_1 \dots w_k$ Basis von Bild$(f)$)

Sei $v' := \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k$

dann gilt: $f(v') = f(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k)$

$= \lambda_1 f(u_1) + \dots + \lambda_k f(u_k)$

$= \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_k w_k = f(v)$

$\Longrightarrow f(v) = f(v') \overset{\text{Lemma}}{\Rightarrow} v - v' \in \text{kern}(f)$

$v - v' = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_m v_m$ (weil $v_1 \dots v_m$ Basis von kern$(f)$)

$v = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_m v_m + \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k$

(iii) Zeige aus $\mu_1 v_1 + \dots + \mu_m v_m + \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k = 0$

folgt $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_m = \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$

<u>Bew</u> Sei $0_v = \sum_{i=1}^{m} \mu_i v_i + \boxed{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i} = 0$

$$\Rightarrow f(0_v) = f\left(\sum_{i=1}^{m} \mu_i v_i + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i\right)$$

$$\Rightarrow 0_w = \sum_{i=1}^{m} \mu_i \underbrace{f(v_i)}_{=0_w} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underbrace{f(u_i)}_{=w_i}$$

weil $w_i$ linunabh.

$$\Rightarrow 0_w = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i w_i \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$$

$$\Rightarrow 0_v = \sum_{i=1}^{m} \mu_i v_i \Rightarrow \mu_1 = \dots = \mu_m = 0$$

weil $v_i$ lin unabh.

# Quotientenräume

Sei $\mathcal{U}$ ein Untervektorraum von $V$

$v \in V$

$v + \mathcal{U} = \{ v + u \mid u \in \mathcal{U} \}$

Nebenklasse von $\mathcal{U}$

$V/\mathcal{U} = \{ v + \mathcal{U} \mid v \in V \}$

↖ Quotientenraum

$(v + \mathcal{U}) + (w + \mathcal{U})$
$= (v + w) + \mathcal{U}$

$\lambda \cdot (v + \mathcal{U}) = (\lambda \cdot v) + \mathcal{U}$

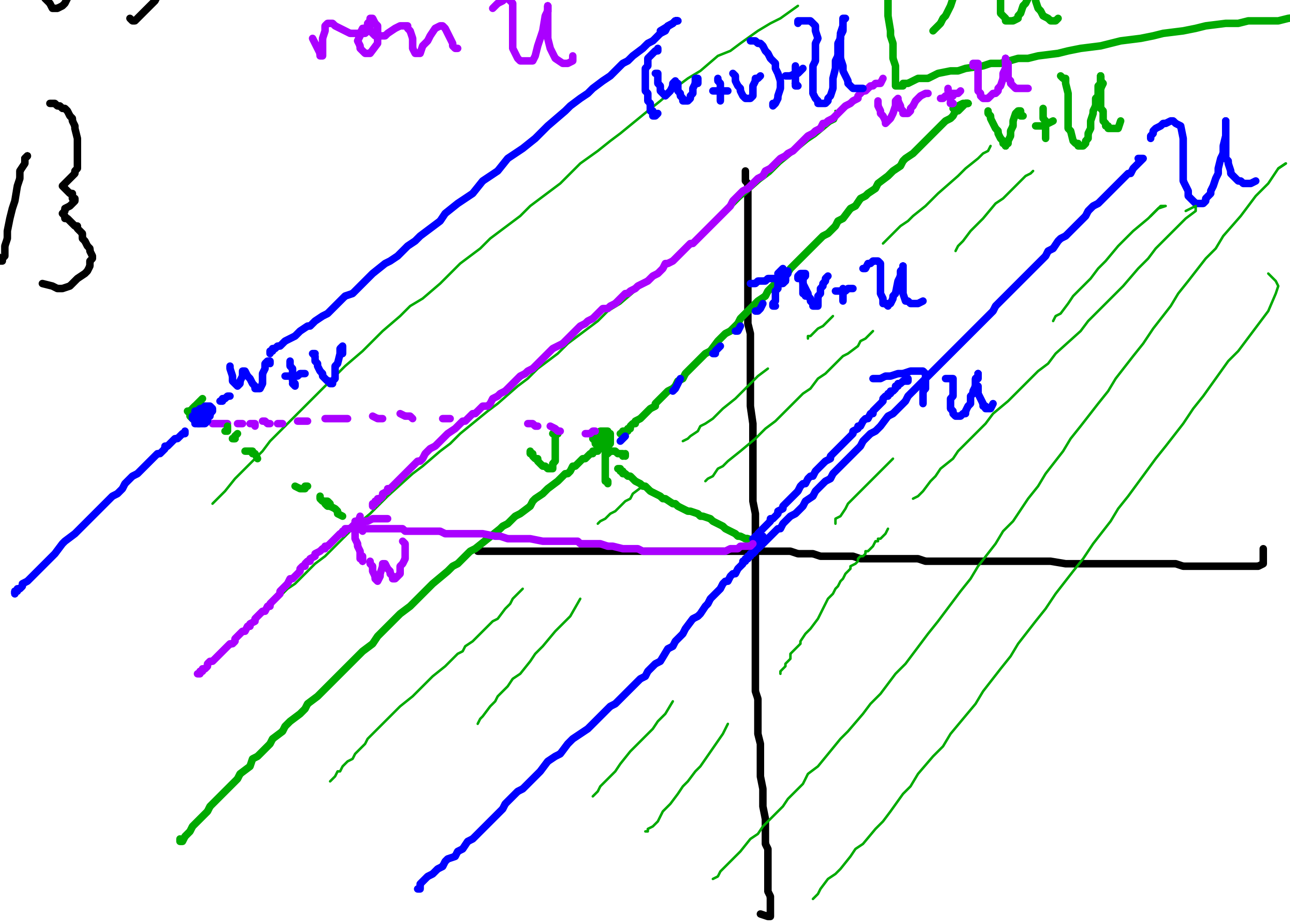
Zur Erinnerung!

$G$ : Gruppe

$\mathcal{U}$: Untergruppe

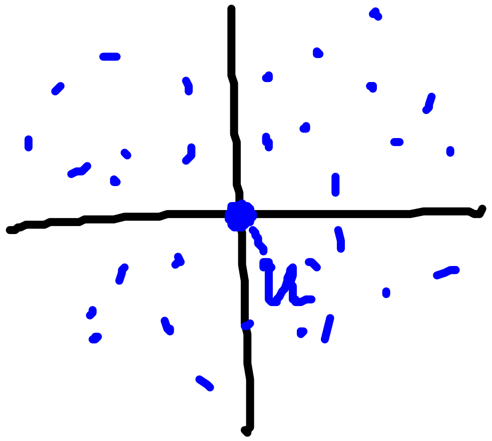
$g + \mathcal{U} = \{ g + u \mid u \in \mathcal{U} \}$

$G/\mathcal{U} = \{ g + \mathcal{U} \mid g \in G \}$



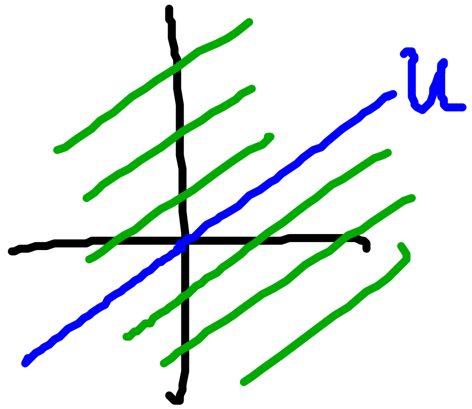
# Verschiedene Dimensionen!

$V = \mathbb{R}^2$ $\dim(U) = 0$



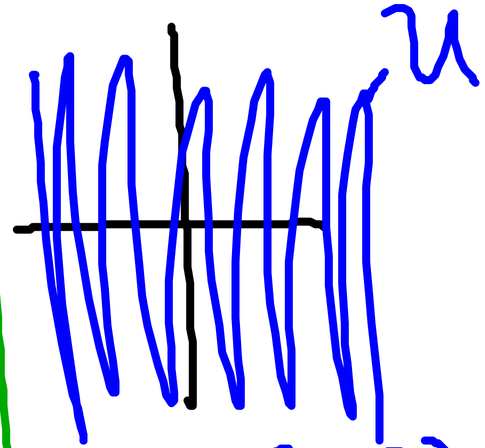

$V/U$ = alle Punkte des $\mathbb{R}^2$

$V = \mathbb{R}^2$ $\dim(U) = 1$




$V/U$ = Alle Geraden parallel zu $U$

$V = \mathbb{R}^2$ $\dim(U) = 2$



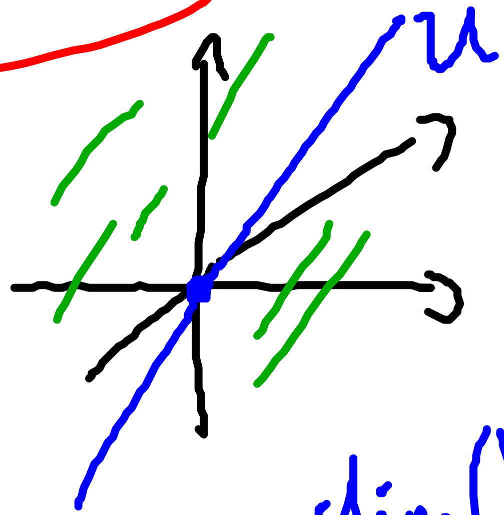

$V/U = \{\mathbb{R}^2\}$

---

$V = \mathbb{R}^3$ $\dim(U) = 0$

$V/U \approx \mathbb{R}^3$

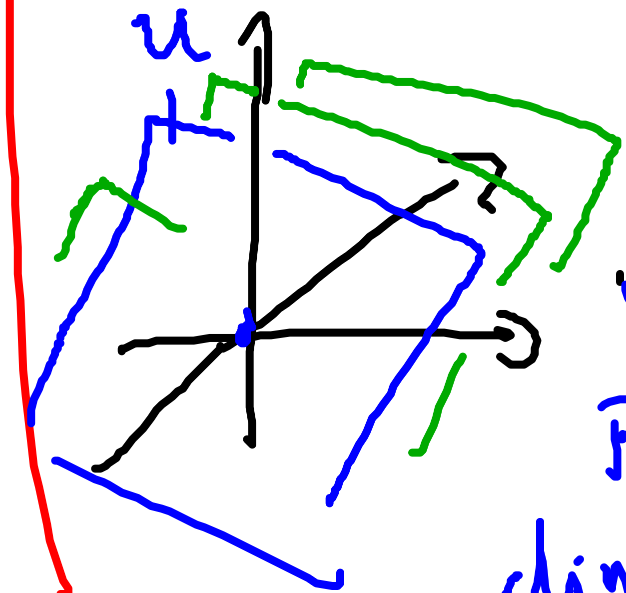
$V = \mathbb{R}^3$ $\dim(U) = 1$




$V/U$ = alle Geraden parallel zu $U$

$\dim(V/U) = 2$

$V = \mathbb{R}^3$ $\dim(U) = 2$




$V/U$ = alle Parallelen Ebenen zu $U$

$\dim(V/U) = 1$

$V = \mathbb{R}^3$ $\dim(U) = 3$

$V/U = \{\mathbb{R}^3\}$

Isomorphiesatz: $f: V \to W$ lin Abb.

$$V/\mathrm{Kern}(f) \sim \mathrm{Bild}(f)$$

$$V/\mathrm{Kern}(f) = \{v + \mathrm{Kern}(f) \mid v \in V\}$$

$$\mathrm{Bild}(f) = \{f(v) \mid v \in V\}$$

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x - y$$