Was bisher geschah:

- Vektorraums, Untervektorräume
- span, lineare Unabhängigkeit
- **Basis** (aufspannend, linear unabhängig)
  - In endlich erzeugten Vektorraum V haben alle Basen die gleiche (endliche) Mächtigkeit.

  $\Rightarrow$ Diese Mächtigkeit nennt man Dimension von V.

Komponentenschreibweise bzgl Basis:

Sei $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ Basis von V

jedes $v \in V$ ist darstellbar als $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i = v$

die $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ in dieser Darstellung sind eindeutig und werden als Koordinaten von v bzgl $\mathcal{B}$ bez.

$$v = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Insbesondere: $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \ldots, b_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$

Typisches Problem: Umrechnung von einer Basis in die Andere

Sei $B = (b_1, \dots, b_n)$ Basis von V
und $B' = (v_1, \dots, v_n)$ Basis von V

Die v_i sind durch ihre Koordinaten bzgl. B festgelegt (gegeben).

Frage: Welche Koordinaten hat

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B$$

bezüglich B'?

Strategie:

- Stellen zunächst Vektoren aus B bzgl. der Basis B' dar.

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{j,i} v_j$$

Berechnung der λ_{ij} als „Preprocessing"

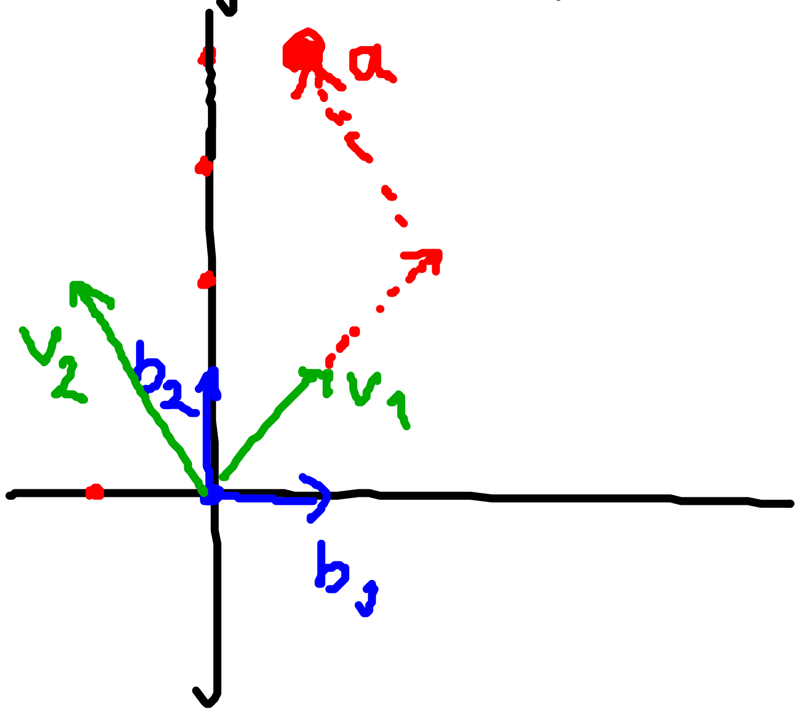
- Beliebiger Vektor

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{j,i} v_j \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_{j,i}} \, v_j = \sum_{j=1}^{n} \mu_j v_j$$

Koeffizienten bzgl. B'

Beispiel im $\mathbb{R}^2$



$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot \left(\frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) + 4 \left(\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{3} + \frac{4}{3} \right) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

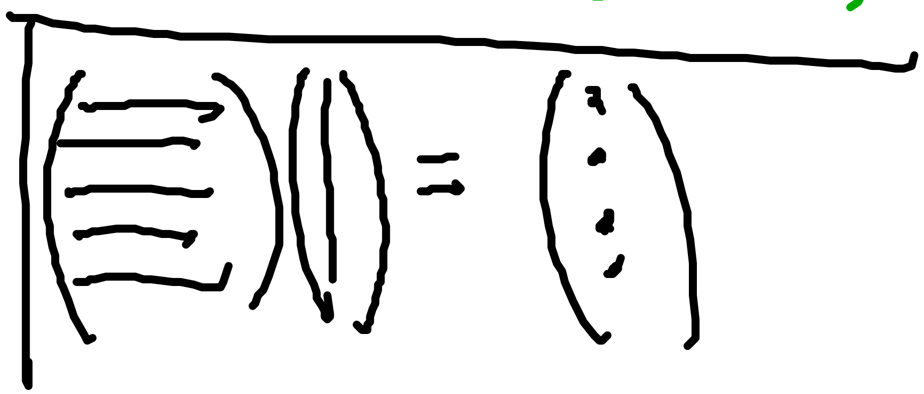
Matrizenschreibweise

Vorfaktoren in neuer Basis $(a)_{\mathcal{B}} = \sum_{j=1}^{n} \overbrace{\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_{j,i}}}^{= \mu_j} v_j$

$$\mu_j = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{a_i}_{\text{1-dimensionales Array}} \overbrace{\lambda_{j,i}}^{\text{2-dimensionales Array}}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda_{n1} & & \cdots & \lambda_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum a_i \lambda_{1i} \\ \sum a_i \lambda_{2i} \\ \vdots \\ \sum a_i \lambda_{ni} \end{pmatrix}.$$

$$M \cdot a = \mu$$



Letztes Mal: Lineare Abbildungen

V, W zwei Vektorräume

$f: V \to W$ heißt linear wenn

$$\left.\begin{array}{l}(i)\ f(x+y) = f(x) + f(y) \\ (ii)\ f(\lambda x) = \lambda f(x)\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{für alle} \\ x, y \in V \\ \lambda \in K\end{array}$$

Wichtige Eigenschaften:

(i) $f(x-y) = f(x) - f(y)$

(ii) $f(0_V) = 0_W$

(iii) $f(\sum(\lambda_i v_i)) = \sum(\lambda_i f(v_i))$

Aus (iii) folgt: f ist durch die Bilder von Basisvektoren eindeutig festgelegt.

Bew: Sei $v \in V$, $v_1 \ldots v_n$ Basis von V $v = \sum \lambda_i v_i \Rightarrow$

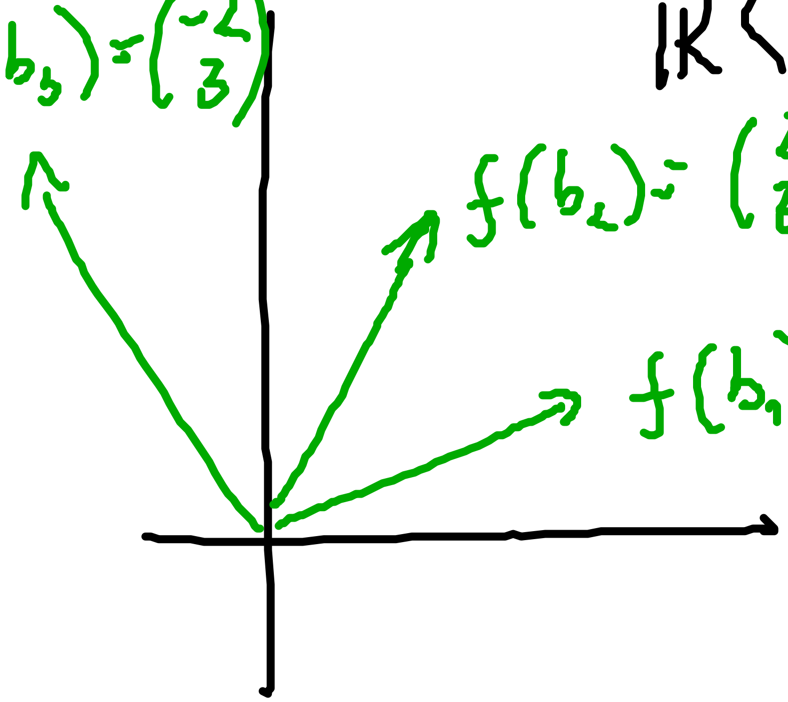
$$f(v) = f(\sum \lambda_i v_i) = \sum \lambda_i f(v_i)$$

Konkretes Beispiel: Abb von $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

Standardbasen in beiden VR

$$\mathbb{R}^3 = \operatorname{span}\left(\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}_{b_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}_{b_2}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{b_3} \right) \qquad \mathbb{R}^2 = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right)$$

$\mathbb{R}^2$



$f(b_3) = \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$

$f(b_2) = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

$f(b_1) = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

Abbildungsmatrix

$$\begin{array}{cc} & 3 \\ 2 & \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{pmatrix}$$

$= M$

$$M \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}, \quad M \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \quad M \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$$

Die Spalten der Matrix sind die Bilder der Einheitsvektoren

Lineare Abbildung in Matrizenschreibweise:

Seien V, W endl. erz. Vektorräume

<u>Basen</u>: $v_1 \dots v_n$ sei Basis B von V

$w_1 \dots w_m$ sei Basis B' von W

Komponentendarstellung: $v = \sum \underline{\lambda_i} v_i = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_B$, $w = \sum \mu_i w_i = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix}_{B'}$

$$\begin{pmatrix} | & & | \\ f(v_1) & \dots & f(v_n) \\ | & & | \end{pmatrix} \overset{v}{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix} = f(v)$$

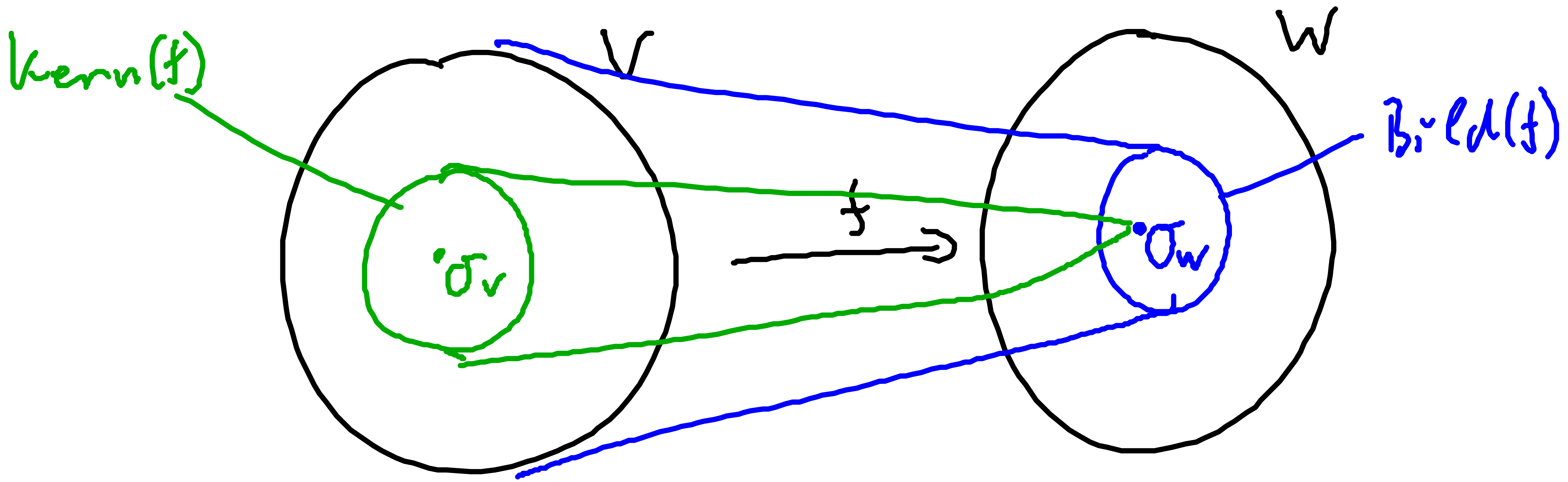
$$f(v_1) = \sum_{i=1}^{m} \mu_{i1} w_i \qquad f(v_n) = \sum_{i=1}^{m} \mu_{in} w_i$$

$$\begin{pmatrix} \mu_{11} & \dots & \mu_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \mu_{m1} & \dots & \mu_{m,n} \end{pmatrix}$$

Kern, Bild von linearen Abbildungen:

$$\mathrm{Bild}(f) = \{ f(v) \mid v \in V \} \subseteq W$$

$$\mathrm{Kern}(f) = \{ v \in V \mid f(v) = 0 \} \subseteq V$$



Satz Sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung

(i) $\mathrm{kern}(f)$ ist Untervektorraum von V

(ii) $\mathrm{Bild}(f)$ ist Untervektorraum von W

Bew (i) Sei $v_1, v_2 \in \mathrm{kern}(f)$, $\lambda \in K$

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = 0 + 0 + 0 \Rightarrow v_1 + v_2 \in \mathrm{kern}$$

$$f(\lambda v_1) = \lambda f(v_1) = \lambda 0 = 0 \Rightarrow \lambda v_1 \in \mathrm{kern}$$

(ii) $w_1, w_2 \in \mathrm{Bild}(f)$ $\lambda \in K$ mit $w_1 = f(v_1), w_2 = f(v_2)$

$$w_1 + w_2 = f(v_1) + f(v_2) = f(\underbrace{v_1 + v_2}_{\in V}) \in \mathrm{Bild}(f)$$

$$\lambda w_1 = \lambda f(v_1) = f(\underbrace{\lambda v_1}_{\in V}) \in \mathrm{Bild}(f)$$