Basen,

Def: Sei V ein Vektorraum.
Eine Menge von Vektoren $B \subseteq V$
heißt Basis von V

(i) $\operatorname{span}(B) = V$ (B ist ein Erzeugendensystem)

(ii) B ist linear unabh.

Endlich erzeugter Fall $B = \{v_1, v_2, \dots v_n\}$

(i) wenn $\operatorname{span}(v_1, v_2 \dots v_n) = V$

(ii) $v_1, \dots v_n$ linear unabh

Satz Sei $B = (v_1, \dots, v_n) \in V$ (V sei endl. erzeugt)

Die folgenden Aussagen sind gleichwertig

(i) B ist eine Basis von V

(ii) B ist nichtverkürzbares Erzeugendensystem von V

(iii) zu jedem $v \in V$ gibt es eindeutige $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ mit $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$

(iv) B ist unverlängerbar linear unabhängig in V. D.h B ist linear unabh.

für jedes $v \in V$ gilt $(v_1, \dots, v_n, v)$ ist linear abh.

Bew (i) ⇒ (ii) „Basis" ⇒ nicht verk Erz system

Sei $v_1 \dots v_n$ Basis von V

$\Rightarrow \operatorname{span}(v_1, \dots, v_n) = V$ (Erz. system)

Noch zu zeigen: „nicht verkürzbar"

Ann $v_1, \dots v_n$ verkürzbar ⇒

$\exists i \ \operatorname{span}(v_1 \dots \hat{v}_i \dots v_n) = \operatorname{span}(v_1, \dots v_n)$

$v_i \in$ $v_i \in$

$\Rightarrow v_i = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \dots \lambda_n v_n$

⇒ $v_1 \dots v_n$ sind linear abhängig ↯ zu Basis

(ii) $\Rightarrow$ (iii) „nicht verk. bar Erz. Sys." $\Rightarrow$ „eindeutige Linearkomb."

Sei $v_1 \ldots v_n$ nicht verk. Erz System und $v \in V$

Ann $\left.\begin{array}{l} v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \\ = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n \end{array}\right\}$ und oBdA $\lambda_1 \neq \mu_1$

$$\Rightarrow 0 = \underbrace{(\lambda_1 - \mu_1)}_{\neq 0} v_1 + (\lambda_2 - \mu_2) v_2 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n) v_n$$

$$\Rightarrow v_1 = -\frac{(\lambda_2 - \mu_2)}{(\lambda_1 - \mu_1)} v_2 - \ldots - \frac{(\lambda_n - \mu_n)}{(\lambda_1 - \mu_1)} v_n$$

$\Rightarrow v_1 \in \operatorname{span}(v_2 \ldots v_n) \Rightarrow v_1 \ldots v_n$ verkürzbar

$\lightning$

(iii) $\Rightarrow$ (iv) „eindeutige Linearkomb" $\Rightarrow$ „nicht verlängerbar linear unabh"

Sei für jedes $v \in V$ die Darstellung

$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ eindeutig

$\Rightarrow \left[0 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \Rightarrow \lambda_1 = 0, \dots, \lambda_n = 0 \right]$

$\Rightarrow v_1, \dots, v_n$ ist lin unabh.

Ist $v \in V$ so ist $1 \cdot v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$

für geeignete λ_i

$\Rightarrow (v, v_1, \dots, v_n)$ sind lin abh.

$\Rightarrow$ nicht verlängerbar.

(vi) $\Rightarrow$ (i) „nicht verlängerbar lin unabh." $\Rightarrow$ „Basis"

Sei $v_1, \dots, v_n$ unverlängerbar lin unabh.

Zu zeigen $\operatorname{span}(v_1 \dots v_n) = V$

Sei $v \in V \Rightarrow (v_1, v_2, \dots, v_n)$ lin abh.

$$0 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + \lambda v$$

$\lambda \neq 0$ da $v_1 \dots v_n$ lin unabh.

$$\Rightarrow v = -\frac{\lambda_1}{\lambda} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda} v_2 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda} v_n \in \operatorname{span}(v_1 \dots v_n)$$

Beispiele für Basen:

Standardbasis des $\mathbb{R}^n$

$$\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_2}, \dots, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_n} \right)$$

Standardbasis des $\mathbb{R}^n$

Andere Basis
$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Beispiel für unendl. große Basis eines nicht endl. erzeugten Vektorraumes

$V = \mathbb{R}[x]$ Basis z.B $(1, x, x^2, x^3, \dots)$

Von Basen zu Koordinaten

Sei V ein (endl. erzeugter) Vektorraum

Sei $v_1 \dots v_n$ Basis von V

Jedes $v \in V$ läßt sich eindeutig schreiben als

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Koordinaten von v bzgl. $v_1 \dots v_n$

Satz: jeder endlich erzeugte Vektorraum hat eine Basis

„Bew" Sei $V = \mathrm{span}(v_1, \dots, v_n)$

entweder $(v_1 \dots v_n)$ ist linear unab. $\Rightarrow$ Basis

oder es gibt ein i mit

$$v_i \in \mathrm{span}(v_1 \dots \hat{v}_i \dots v_n)$$

$$\Rightarrow V = \mathrm{span}(v_1 \dots \hat{v}_i \dots v_n)$$

nimm v_i aus dem Erzeugendensystem weg

Ausgleich für unendlich erzeugte VR

<u>Satz</u> Jeder VR hat eine Basis

Beweis benötigt „Auswahlaxiom"

Sei A eine Menge von Teilmengen von X

dann gibt es eine „Auswahlfunktion"

$f: A \to X$ mit $f(A) \in A$

Zurück zum endlich erzeugten Fall:

Frage: Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ und $(w_1, \ldots, w_m)$ beides Basen eines Vektorraumes V

$$\boxed{\text{gilt } n = m \text{ ?}}$$

Antwort: „Ja" ... einiges an Arbeit

Steinitz'sches Austauschlemma:

Sei $(v_1 \dots v_n)$ Basis von V und $w \in V \setminus \{0\}$ dann ex $i \in \{1 \dots n\}$ so daß $(v_1 \dots \hat{v}_i \dots v_n, w)$ Basis von V ist.

Bew Sei $w = \underset{\neq 0}{\lambda_1} v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ OBdA $\lambda_1 \neq 0$

$$v_1 = \frac{1}{\lambda_1} w - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} v_n$$

$$\Rightarrow v_1 \in \operatorname{span}(w, v_2, v_3 \dots v_n)$$

$$\Rightarrow V = \operatorname{span}(w, v_2, \dots, v_n)$$

Noch zu zeigen $(w, v_2, \dots, v_n)$ sind lin unabh.

$$\vec{0} = \mu_1 w + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_n v_n$$

$$\vec{0} = \mu_1(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n) + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_n v_n$$

$$\vec{0} = \underbrace{\mu_1 \lambda_1}_{=0} v_1 + (\underbrace{\mu_1 \lambda_2 + \mu_2}_{=0}) v_2 + \dots + (\underbrace{\mu_1 \lambda_n + \mu_n}_{=0}) v_n$$

wg $v_1 \dots v_n$ sind lin unabh.

$\lambda_1 \neq 0$

$$\Rightarrow \mu_1 = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\mu_2}_{=0} v_2 + \dots + \underbrace{\mu_n}_{=0} v_n = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n = 0 \Rightarrow (w, v_2, \dots, v_n) \text{ lin unabh.}$$

Austauschsatz für Basen:

Sei $(v_1 \ldots v_n)$ eine Basis von V und Sei $(w_1 \ldots w_r)$ linear unabhängig. Dann gilt

(i) $r \leq n$

(ii) Es gibt Indizes $i_1, \ldots, i_r \in \{1, \ldots, n\}$ sodass wenn man $v_{i_1}, \ldots, v_{i_r}$ aus der Basis weglässt und $w_1 \ldots w_r$ hinzufügt wieder eine Basis erhält.