Letztes Mal:

Sei $v_1, \dots, v_n \in V$, sei V sei K-Vektorraum

- $\operatorname{span}(v_1, \dots, v_n) = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots \lambda_n v_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K\}$
- $(v_1, \dots, v_n)$ sind linear unabhängig

$\Leftrightarrow$ $\left(\begin{array}{l} \text{Aus: } \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \\ \text{folgt: } \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0 \end{array} \right)$

Sätze (i) enthält $(v_1, \dots, v_n)$ den Nullvektor so ist diese Familie linear abhängig

Bew: OBdA $v_1 = 0$

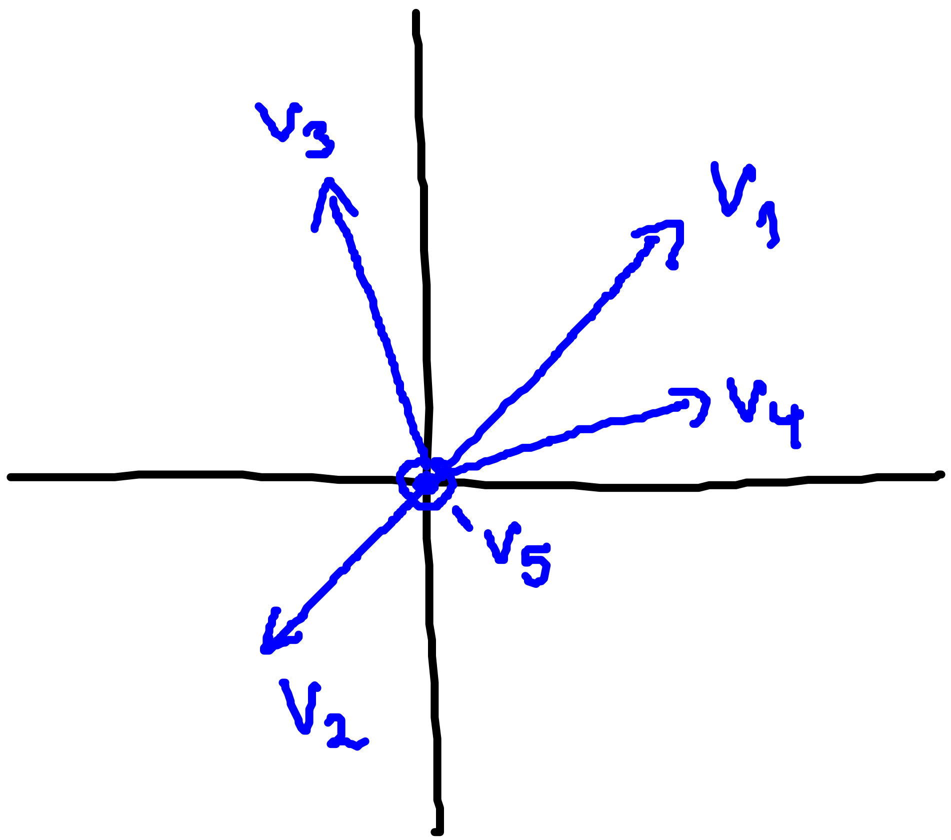
$$0 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n$$

(ii) enthält $(v_1, \dots, v_n)$ zwei identische Vektoren so ist diese Familie linear abhängig.

Bew: OBdA sei $v_1 = v_2$

$$0 = 1 \cdot v_1 + (-1) \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + \dots + 0 \cdot v_n$$

Beispiel im $\mathbb{R}^2$



(v_5) ist abhängig

(v_1) ist unabhängig

(v_1, v_2) ist abhängig

(v_1, v_2, v_3) ist abhängig

(v_1, v_3) ist unabh

(v_1, v_3, v_4) ist abhängig

Wie geht man mit unendlich vielen Vektoren um?

Familie von Vektoren $(v_i)_{i\in I}$

ist eine beliebige Indexmenge

sind auch unendlich viele Elemente

$$\mathrm{span}((v_i)_{i\in I}) = \left\{ \sum_{i\in J} \lambda_i v_i \;\middle|\; J\subseteq I,\ |J|\in\mathbb{N},\ \lambda_i\in K \right\}$$

Summe endl. vielen Vektoren

$(v_i)_{i\in I}$ ist linear unabhängig: wenn jede endliche Teilmenge linear unabhängig ist.

$\mathbb{R}^n$ ist immer span von bereits endlich vielen Vektoren (endlich erzeugt)

Satz die folgenden Aussagen sind gleichwertig:

(i) $(v_1, \dots, v_n)$ sind linear unabhängig

(ii) Jeder Vektor in $\operatorname{span}(v_1, \dots, v_n)$ ist eindeutig aus $v_1, \dots, v_n$ linear kombinierbar

---

Bew (i) $\Rightarrow$ (ii) Sei $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig

Sei $v \in \operatorname{span}(v_1, \dots, v_n)$ mit

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$$

und es gibt einen Index i mit $\lambda_i \neq \mu_i$ (oBdA sei $i = 1$)

$$0 = v - v = (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) - (\mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n)$$

$$= \underbrace{(\lambda_1 - \mu_1)}_{\neq 0} v_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n) v_n \Rightarrow \text{↯ zur unabh.}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Zeige aus nicht (i) $\Rightarrow$ nicht (ii)

linear abhängig $\Rightarrow$ Elemente im Span sind nicht eindeutig linearkombinierbar

---

$0 = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ mit $\lambda_i \neq 0$ für mind. ein i

andererseits

$0 = 0 \cdot v_1 + \ldots + 0 \cdot v_n$ $\Rightarrow$ Darstellung der 0 ist nicht eindeutig

Satz die folgenden Aussagen sind gleichwertig

(i) $(v_1, \dots, v_n)$ ist linear abhängig

3

(ii) Es gibt ein i mit

$$\operatorname{span}(v_1, \dots, v_n) = \operatorname{span}(v_1 \dots \hat{v}_i \dots v_n)$$

lasse v_i weg

1

2

(iii) Es gibt ein i mit

$$v_i \in \operatorname{span}(v_1, \dots \hat{v}_i \dots, v_n)$$

Bew (i) ⇒ (iii) (wenn lin abh. dann $v_i \in \operatorname{span}(v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n)$)

Sei $(v_1 \dots v_n)$ linear abhängig

$\Rightarrow \quad 0 = \underbrace{\lambda_1}_{\neq 0} \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n$ mit $\lambda_i \neq 0$ für ein i, OBdA $i = 1$

$\Rightarrow \quad \lambda_1 v_1 = -\lambda_2 v_2 - \dots - \lambda_n v_n$

$\Rightarrow \quad v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \cdot v_n$

$\Rightarrow \quad v_1 \in \operatorname{span}(v_2, \dots, v_n)$

(iii) $\Rightarrow$ (ii)   oBdA $i=1$

(Aus $\underbrace{v_1 \in \text{span}(v_2 \dots v_n)}_{\text{Voraussetzung}}$ $\Rightarrow$ $\text{span}(v_2 \dots v_n) = \text{span}(v_1 \dots v_n)$)

1. Zeige $\text{span}(v_2 \dots v_n) \subseteq \text{span}(v_1 \dots v_n)$ klar wg Def von span

2. Zeige $\text{span}(v_1 \dots v_n) \subseteq \text{span}(v_2 \dots v_n)$

$\boxed{\begin{aligned} & v_1 \in \text{span}(v_2 \dots v_n) \\ & v_1 = \mu_2 v_2 + \dots \mu_n v_n \end{aligned}}$

Sei $v \in \text{span}(v_1 \dots v_n)$

$\Rightarrow v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$

$\Rightarrow v = \lambda_1 (\mu_2 v_2 + \dots + \mu_n v_n) + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$

$= (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2) v_2 + \dots + (\lambda_1 \mu_n + \lambda_n) \cdot v_n$

$\in \text{span}(v_2 \dots v_n)$

(ii) $\Rightarrow$ (i) (Aus $\mathrm{span}(v_2 \dots v_n) = \mathrm{span}(v_1 \dots v_n)$

$\Rightarrow$ lin abhängig.)

$\mathrm{span}(v_2 \dots v_n) = \mathrm{span}(v_1 \dots v_n) \ni v_1$

$\Rightarrow v_1 = \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$

$\Rightarrow 0 = \underbrace{(-1)}_{\neq 0} v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$

$\Rightarrow (v_1 \dots v_n)$ linear abhängig

Basis: **Def** Sei $U \subseteq V$ ein endlich erzeugt UVR von V

$(v_1, \dots, v_n)$ ist Basis von U wenn

nicht zu klein ⇒ (i) $U = \operatorname{span}(v_1 \dots v_n)$

nicht zu groß (ii) $(v_1 \dots v_n)$ sind linear unabhängig

- U endlich erzeugt wenn so eine endliche Basis existiert.
- Es gibt auch unendlich erzeugte UVR eines Vektorraums (der ist dann auch unendl. erz.) Entsprechende Definition über Indexmenge