Letztes Mal: Vektorräume: $(K, V, +, \cdot, +_V, \cdot_V)$

(i) $(K, +, \cdot)$ ist Körper

(ii) $(V, +_V)$ ist komm. Gruppe

(iii) $(\lambda + \mu) \cdot_V v = \lambda \cdot_V v +_V \mu \cdot_V v$

(iv) $\lambda \cdot_V (v +_V w) = \lambda \cdot_V v +_V \lambda \cdot_V w$

(v) $(\lambda \cdot \mu) \cdot_V v = \lambda \cdot_V (\mu \cdot_V v)$

(vi) $1 \cdot_V v = v$

$+ : K \times K \to K$

$\cdot : K \times K \to K$

$+_V : V \times V \to V$

$\cdot_V : K \times V \to V$

$\Rightarrow (K, V, +, \cdot, +_V, \cdot_V)$ ist K-Vektorraum

Untervektorraum:

Def: Sei $(V, K, +, \cdot, +_V, \cdot_V)$ ein K-Vektorraum
sei $U \subseteq V$. Dann ist U Untervektorraum
wenn:
(i) $U \neq \{\}$
(ii) $v +_V w \in U$ für alle $v, w \in U$
(iii) $\lambda \cdot_V v \in U$ für alle $\lambda \in K$, $v \in U$

Satz: Jeder UVR ist VR.

Bem. Jeder UVR enth. $\vec{0}$

Bew: Nachweisen:
- U ist abgeschl. bzgl $+_V$ (gilt wg (ii))
- U enthält zu $v \in U$ auch $-v = (-1) \cdot_V v$
- U enthält $\vec{0} = 0 \cdot v$, $v \in U \neq \{\}$
- U ist abgeschl. bzgl $\cdot_V$ (gilt wg (iii))

Beispiele: Untervektorräume von $\mathbb{R}^2$

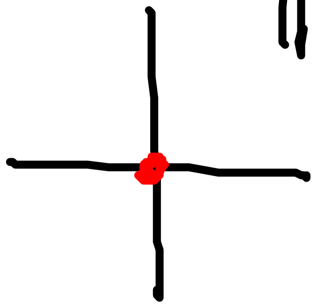
$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

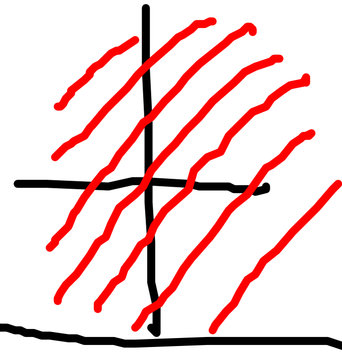
Unterräume:

kleinster UVR $\quad U_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

größter UVR $\quad U_{\mathbb{R}^2} = \mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2$

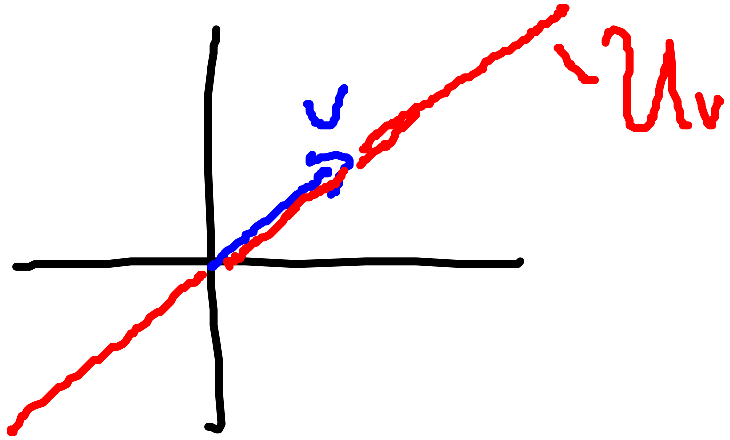




---

kleinste UVR der $v \in \mathbb{R}^2$ mit $v \neq 0$ enthält

$$U_v = \{ \lambda \cdot v \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$



Beh: $U_v = \{\lambda \cdot v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ ist UVR von $\mathbb{R}^2$
$v \neq 0$

<u>Bew</u> (i) $v = 1 \cdot v \in U_v \Rightarrow U_v \neq \{\}$

(ii) Sei $u, w \in U_v \Rightarrow \exists \lambda : u = \lambda v; \exists \mu : w = \mu v$

$u + w = \lambda \cdot v + \mu \cdot v = \underbrace{(\lambda + \mu)}_{\in \mathbb{R}} \cdot v \in U_v$

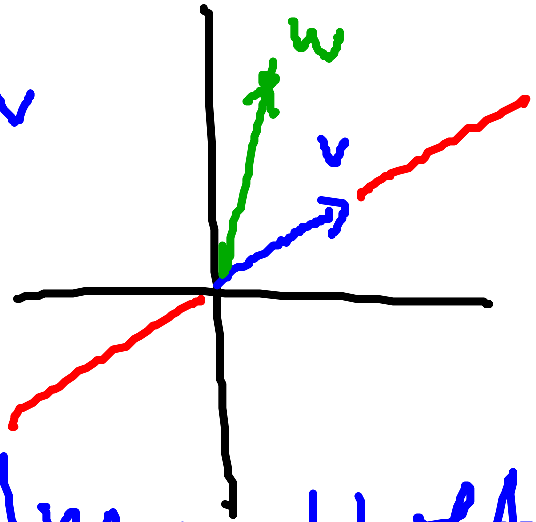
(iii) Sei $u \in U_v$, $\mu \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \lambda : u = \lambda \cdot v$

$\mu \cdot u = \mu \cdot (\lambda \cdot v) = \underbrace{(\mu \cdot \lambda)}_{\in \mathbb{R}} \cdot v \in U_v$

Gibt es UVR zwischen U_v und $\mathbb{R}^2$?

Sei $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und $w \in \mathbb{R}^2 \setminus U_v$

d.h. für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $\lambda v \neq w$

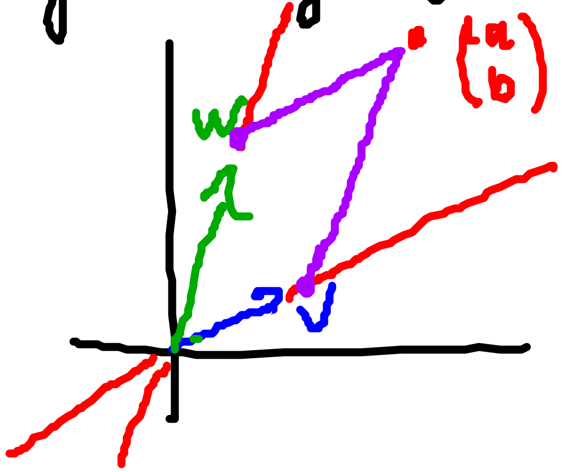


Was ist der kleinste UVR der v und w enthält?

für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist $\lambda v + \mu w$ in diesem UVR

Behauptung $\{\lambda v + \mu w \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$

$\binom{a}{b} \in \mathbb{R}^2$ Zeige es gibt λ, μ mit $\underbrace{\binom{a}{b} = \lambda \cdot \binom{v_1}{v_2} + \mu \cdot \binom{w_1}{w_2}}$



Lineares Glg.sys.
Für bel. $\binom{a}{b}$ eind. lösbar
wenn v kein Vielfaches von w

Sei V ein K-Vektorraum $v_1, \dots v_n \in V$

Def: $\mathrm{span}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K\}$

Satz: (i) $\mathrm{span}(v_1 \dots v_n)$ ist ein UVR von V.

(ii) Sei U ein UVR von V → Selbst Beweisen

$v_1, \dots, v_n \in U \Rightarrow \mathrm{span}(v_1, \dots, v_n) \subseteq U$

(Bem im $\mathbb{R}^n$ ist jeder UVR als $\mathrm{span}(v_1, \dots, v_k)$ schreibbar)

Bew von (i) Zeige $\mathrm{span}(v_1 \ldots v_n)$ ist UVR

(i) $\mathcal{U} = \mathrm{span}(v_1, \ldots, v_n) \Rightarrow v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \ldots + 0 v_n \in \mathcal{U}$

$\Rightarrow \mathcal{U} \neq \{\}$

(ii) Sei $w_1 \in \mathcal{U}$, $w_2 \in \mathcal{U}$, $w_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$

$w_2 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i$

$$w_1 + w_2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) v_i \in \mathcal{U}$$

(iii) Sei $w \in \mathcal{U} \Rightarrow \sum \lambda_i v_i$

$$\mu \cdot w = \mu \cdot \sum \lambda_i v_i = \sum (\mu \lambda_i) \cdot v_i \in \mathcal{U}$$

Definition für Extremfall:

$$\operatorname{span}(\,) = \{0\}$$

Leere Liste

0-Vektorraum

$$\mathbb{R}^n = \operatorname{span}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_2}, \ldots, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_n} \right)$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 \cdot e_1 + a_2 \cdot e_2 + \ldots + a_n \cdot e_n$$

$$\mathbb{R}^n = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + (a_{n-1} - a_n) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + (a_1 - a_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Typische Fragen:

- Wann ist $\operatorname{span}(v_1, v_2, \dots v_n) = \operatorname{span}(w_1, w_2, \dots w_d)$
- Wann ist $\operatorname{span}(v_1, \dots, v_n, v_{n+1}) = \operatorname{span}(v_1 \dots v_n)$

Behandlung über Lineare Abhängigkeit.

Bsp $\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

$= \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

denn $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

doppelte Elemente sind erlaubt

Def: Eine Familie von Vektoren $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ heißt linear unabhängig

wenn aus $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$

folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$

$v_1, \ldots, v_n$ sind linear unabh. wenn sich der

0-Vektor nur auf triviale Art linear kombinieren läßt.

$(v_1 \ldots v_n)$ sind linear abhängig wenn es $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$

mit $0 = \sum \lambda_i v_i$ und mindestens ein $\lambda_i \neq 0$