Letztes Mal:

Jedes Polynom $p(x) = x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \dots + a_1 x + a_0$

Lässt sich schreiben als:

$$p(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_d)$$

mit $x_0 \ldots x_d \in \mathbb{C}$

Sind alle $a_0, \ldots, a_{d-1}$ reelle Zahlen, so gilt:

$$p(x_0) = 0 \Rightarrow p(\overline{x_0}) = 0$$

Bew: es gilt: $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$, $\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}$

Induktion über den Berechnungsbaum von $p(x)$ ergibt

$$p(\bar{x}) = \overline{p(x)}.$$

Damit $p(\overline{x_0}) = \overline{p(x_0)} = \bar{0} = 0$

Echt komplexe Nullstellen treten in konjugierten Paaren auf

Sind in $p(x) = x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \dots + a_1 x + a_0$ alle $a_{d-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$ so läßt sich $p(x)$ als Produkt von reellen linearen und reellen quadratischen Faktoren schreiben.

- Jede reelle Nullstelle x_0 liefert reellen Linearfaktor $(x - x_0)$
- Jede komplexe Nullstelle z_0 liefert quadratischen Faktor

$$(x-z)(x-\bar{z}) = x^2 - zx - \bar{z}x + z\bar{z}$$
$$= x^2 - x\underbrace{(z+\bar{z})}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{z\bar{z}}_{\in \mathbb{R}}$$

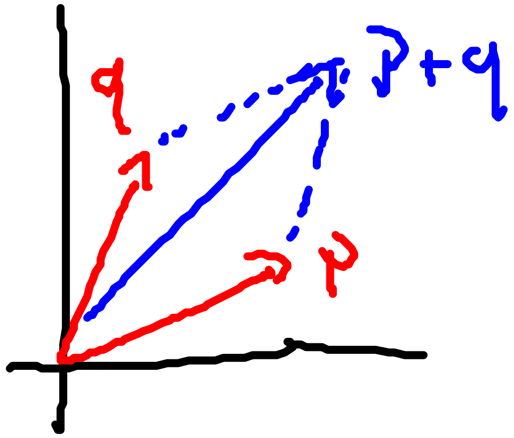
③ Vektorräume

- „Rechnen" mit Punkten im Raum
- Geometrie ⟺ Algebra
- Lineare Gleichungssysteme → Numerik
- „Räume" von Objekten

Zwei Grundoperationen auf Vektorräumen:

Ebene

Vektor-Addition im $\mathbb{R}^2$

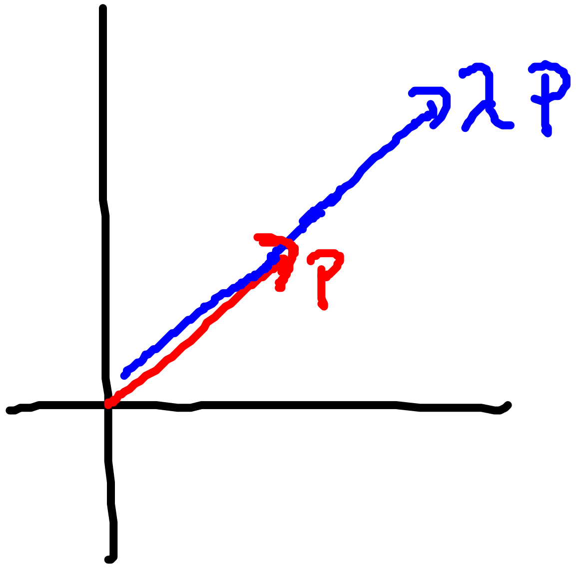


$$\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_2\\b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+a_2\\b_1+b_2\end{pmatrix}$$

Analog im Raum $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+a_2\\b_1+b_2\\c_1+c_2\end{pmatrix}$$

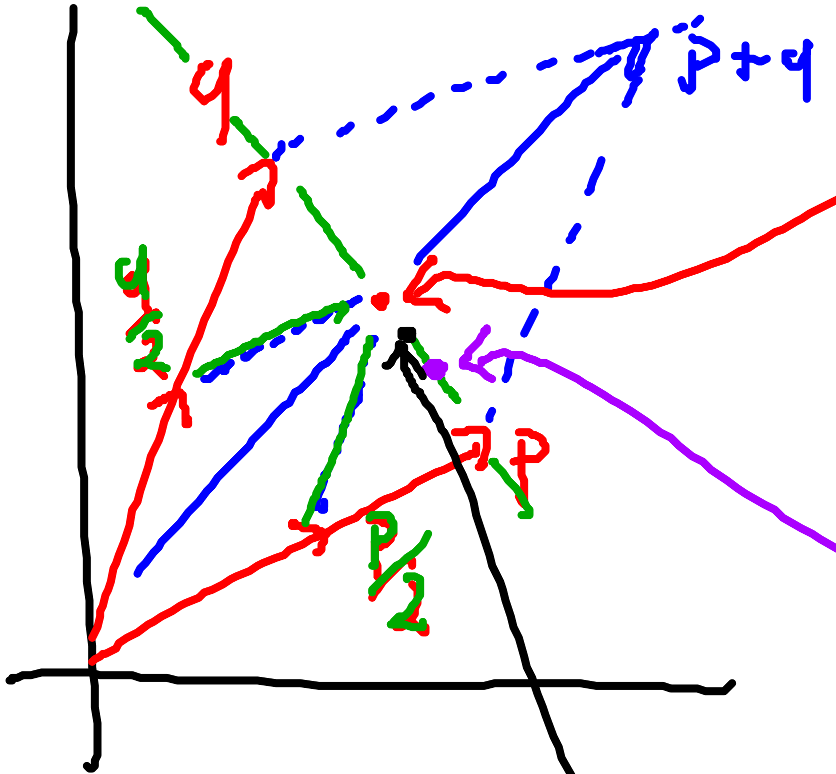
Skalar-Multiplikation



$$\lambda\cdot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda a\\\lambda b\end{pmatrix}$$

$$\lambda\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda a\\\lambda b\\\lambda c\end{pmatrix}$$

Bsp Mittelpunktsberechnung



$$\frac{p+q}{2} = \frac{p}{2} + \frac{q}{2}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

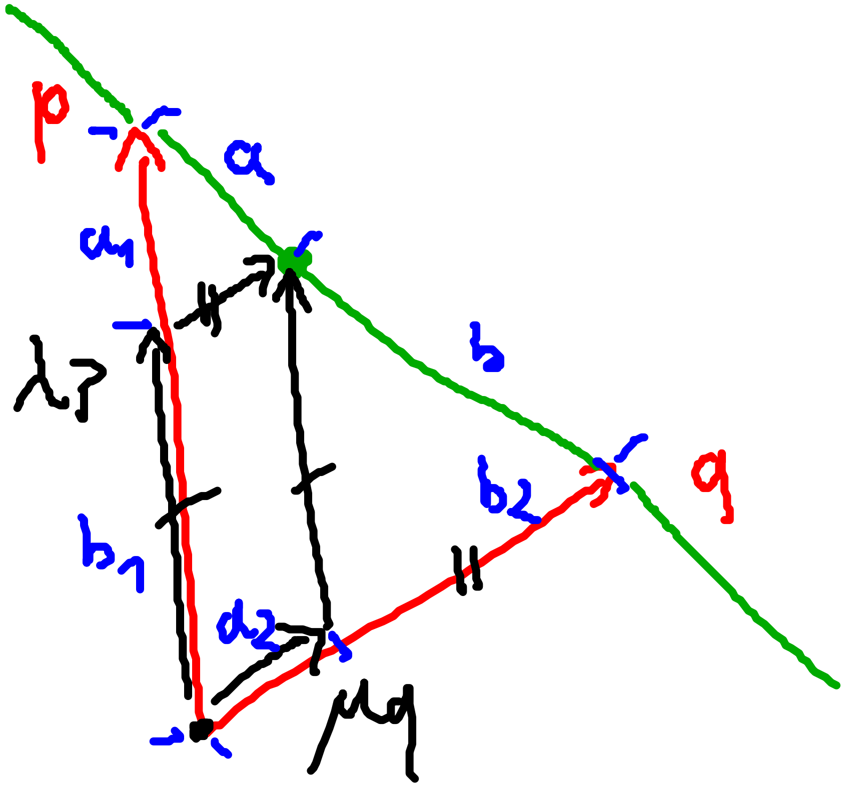
$$\frac{5}{8} + \frac{3}{8} = 1$$

$$\frac{1}{2}\left(p + \frac{p}{2} + \frac{q}{2}\right) = \frac{3}{4}p + \frac{1}{4}q$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}p + \frac{1}{4}q + \frac{p}{2} + \frac{q}{2}\right) = \frac{3}{8}p + \frac{1}{4}p + \frac{1}{8}q + \frac{1}{4}q$$

$$= \frac{5}{8}p + \frac{3}{8}q$$

Vermutung Gerade durch p und q ist $\{\lambda p + \mu q \mid \lambda + \mu = 1\}$

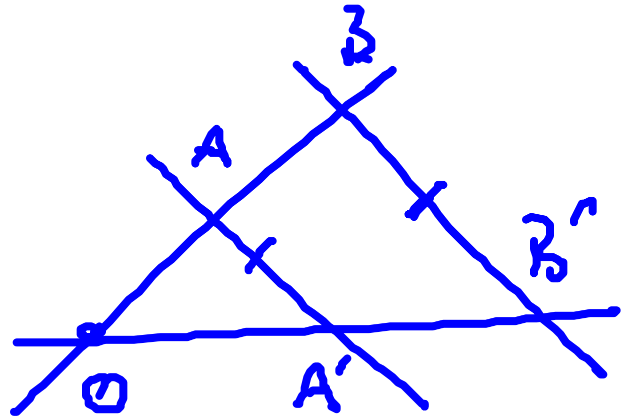


$$\lambda = \frac{b_1}{a_1+b_1} = \frac{b}{a+b}$$

$$\mu = \frac{a_2}{a_2+b_2} = \frac{a}{a+b}$$

$$\lambda + \mu = \frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b} = \frac{b+a}{a+b} = 1$$

Strahlensatz



$$\frac{|AB|}{|OB|} = \frac{|A'B'|}{|OB'|}$$

Was waren „notwendige" Bedingungen, dass wir „so" rechnen konnten?

Zwei Typen von Objekten: Zahlen $\rightsquigarrow \underset{\text{Körper}}{K}$

Vektoren $\rightsquigarrow V$

Vier Operationen: Addition in K $\quad +: K \times K \to K$

Multiplikation in K $\quad \cdot: K \times K \to K$

Vektoraddition: $\quad +_V: V \times V \to V$

Skalar Multiplikation: $\quad \cdot_V: K \times V \to V$

Vektorraumaxiome

Abb. $+ : K \times K \to K$; $\cdot\ K \times K \to K$, $+_V\ V \times V \to V$, $\cdot_V\ K \times V \to V$

(i) $(K, +, \cdot)$ ist Körper

(ii) $(V, +_V)$ ist kommutative Gruppe

(iii) $(\lambda + \mu) \cdot_V v = \lambda \cdot_V v +_V \mu \cdot_V v$ für alle $\mu, \lambda \in K$, $v \in V$

(iv) $\lambda \cdot_V (v +_V w) = \lambda \cdot_V v +_V \lambda \cdot_V w$ für alle $\lambda \in K$, $v, w \in V$

(v) $(\lambda \cdot \mu) \cdot_V v = \lambda \cdot_V (\mu \cdot_V v)$ für alle $\lambda, \mu \in K$, $v \in V$

(vi) $1 \cdot_V v = v$ für alle $v \in V$

$\Rightarrow$ $(V, K, +, \cdot, +_V, \cdot_V)$ ist ein Vektorraum

Beispiele für Vektorräume:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\} \qquad K = \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} +_V \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \; ; \quad \lambda \cdot_V \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$

ist Vektorraum

Polynome als Vektoren

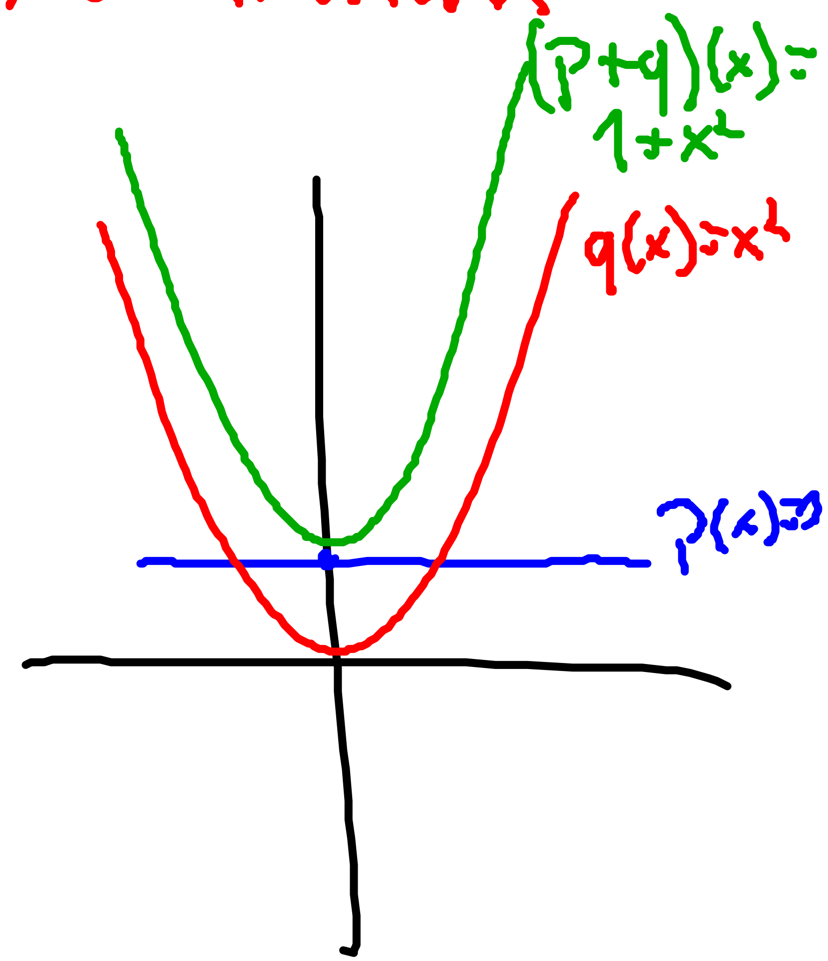
$K = \mathbb{R}$

$V = \mathbb{R}[x]$ ← Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$

$p, q \in \mathbb{R}[x]$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$(p +_V q)(x) := p(x) + q(x)$

$(\lambda \cdot_V q)(x) := \lambda \cdot p(x)$



Rechenregeln in allen Vektorräumen

(i) $0 \cdot_V v = \mathcal{O}$

Bew: $\underline{0 \cdot_V v} = (0+0) \cdot_V v = \underline{0 \cdot_V v} + \underline{0 \cdot_V v}$

$\Rightarrow 0 \cdot_V v = \mathcal{O}$

(ii) $\lambda \cdot_V \mathcal{O} = \mathcal{O}$

Bew $\underline{\lambda \cdot_V \mathcal{O}} = \lambda \cdot_V (\mathcal{O} + \mathcal{O}) = \underline{\lambda \cdot_V \mathcal{O}} + \underline{\lambda \cdot_V \mathcal{O}}$

$\Rightarrow \lambda \cdot_V \mathcal{O} = \mathcal{O}$

(iii) $\lambda \cdot_V v = \mathcal{O} \Rightarrow \lambda = 0$ oder $v = \mathcal{O}$

Bew ....

(iv) $(-1) \cdot_V v = -_V v$

Bew $\underline{v} +_V \underline{(-1) v} = (1 \cdot_V v) + (-1 \cdot_V v) = (1 + (-1)) \cdot_V v$

$= 0 \cdot_V v = \underline{\mathcal{O}} \Rightarrow (-1) \cdot_V v = -_V v$

0 = Null in $(K, +)$

$\mathcal{O}$ = Null in $(V, +_V)$

$-_V v$ ist Inverse von v in $(V, +_V)$