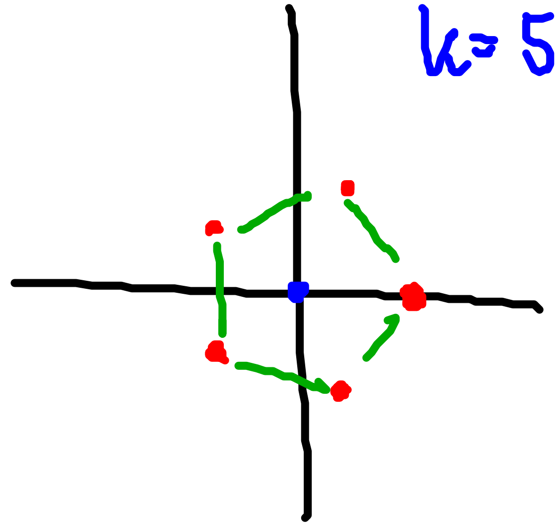
Letztes Mal: Bestimmung der Lösungen von $\boxed{\omega^k = 1}$: $\omega_n = e^{in\frac{2\pi}{k}}$ $\quad n = 0, \dots, k-1$

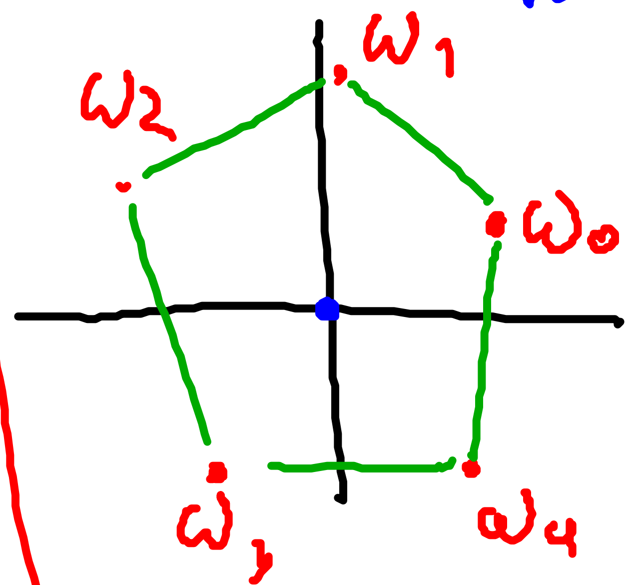
Heute: Lösungen $\boxed{\omega^k = z = re^{i\varphi}}$



Es gibt k Lösungen $\omega_0 \dots \omega_{k-1}$

$\sqrt[k]{\ } : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

$$\omega_n = \sqrt[k]{r}\; e^{i\frac{\varphi}{k}} \cdot e^{in\frac{2\pi}{k}}$$

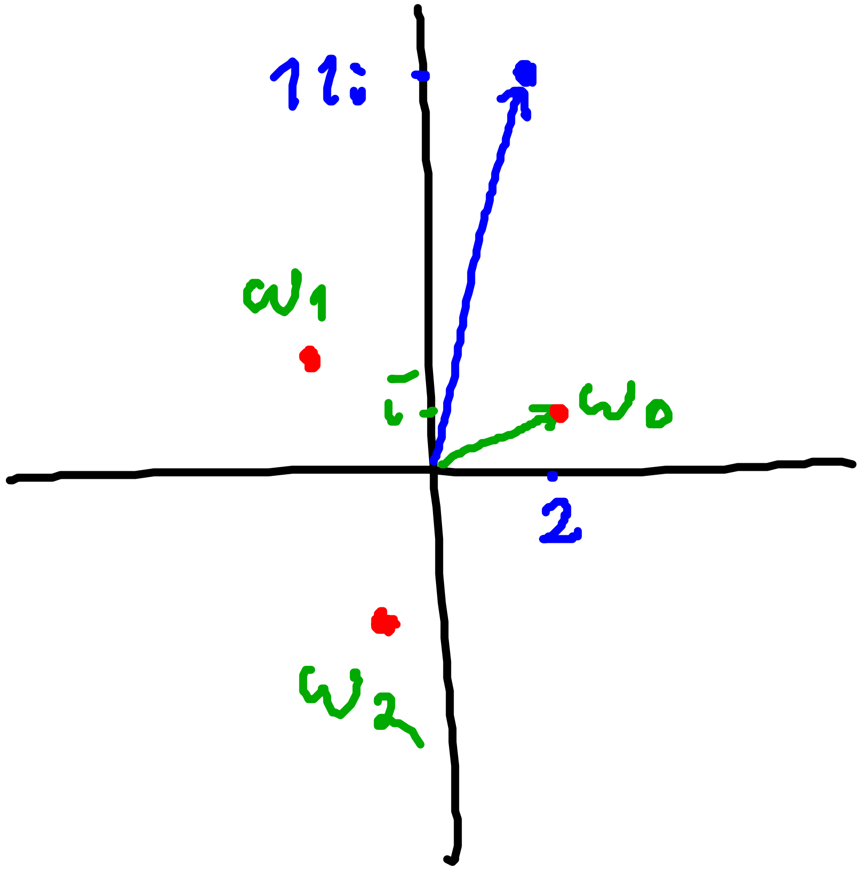


Probe: $(\omega_n)^k = \left(\sqrt[k]{r} \cdot e^{i\frac{\varphi}{k}} \cdot e^{in\frac{2\pi}{k}}\right)^k$

$= r \quad e^{i\varphi} \cdot \quad 1$

$= z$

Bsp: gesucht $\omega^3 = 2 + 11i = z$



Länge: $\sqrt{2^2 + 11^2} = |z|$

$= \sqrt{125}$

Länge ω: $\sqrt[3]{\sqrt{125}}$

$= \sqrt{\sqrt[3]{125}}$

$= \sqrt{5}$

$\omega_0 = 2 + i$

$\omega = a + ib \Rightarrow a^2 + b^2 = 5$

Was heißt es eine Lösungsformel für eine allgemeine Polynomgleichung $f(x)=0$ anzugeben

- Das bestimmen der k-ten Einheitswurzeln heißt „radizieren"

Schreibe Lösung als Kombination von

- Koeffizienten des Polynoms
- Zahlen
- $+, -, \cdot, \div$
- „Radizieren"

z.B. $x^2+px+q=0$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

Auflösbar durch Radikale

Auflösbarkeit durch Radikale: Polynome vom Grad d

$d=1 \Rightarrow$ lineare Gleichungen $ax+b=0$

$d=2 \Rightarrow$ (p, q) Formel

$d=3 \Rightarrow$ dal Ferro, Tartaglia, Cardano ~1530

$d=4 \Rightarrow$ Cardano, Ferrari ~1540

$d=5 \Rightarrow$ Abel + Galois ~1824

zeigen: „nicht möglich"

Fundamentalsatz der Algebra

(Gauss 1799, d´Alembert 1749)

Jedes Polynom $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ ← Polynome mit komplexen Koeffizienten

hat mindestens eine

Nullstelle in $\mathbb{C}$

d.h. $\forall f(x) \in \mathbb{C}[x] : \exists z \in \mathbb{C} : f(z) = 0$

• „Begründung" für FSDA

Sei $f(x) = \boxed{x^d} + a_{d-1}x^{d-1} + \dots + a_2x^2 \boxed{+ a_1x + a_0}$

$a_0, \dots, a_{d-1} \in \mathbb{C}$

oBdA $a_0 \neq 0$

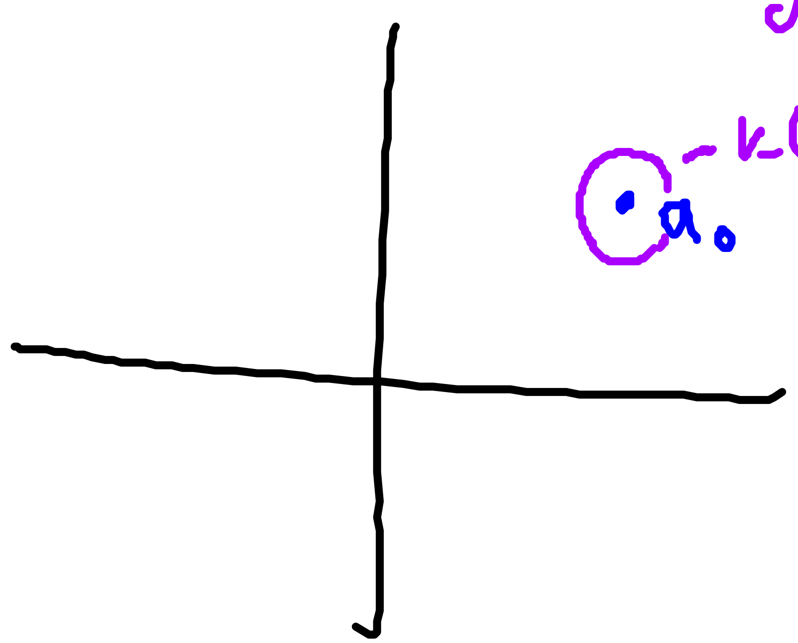
Betrachte Kurven der Form

$f(r \cdot e^{i\varphi})$, r fest und $0 < \varphi < 2\pi$

$0 < r$ sehr klein

$a_0 + a_1x$ dominieren

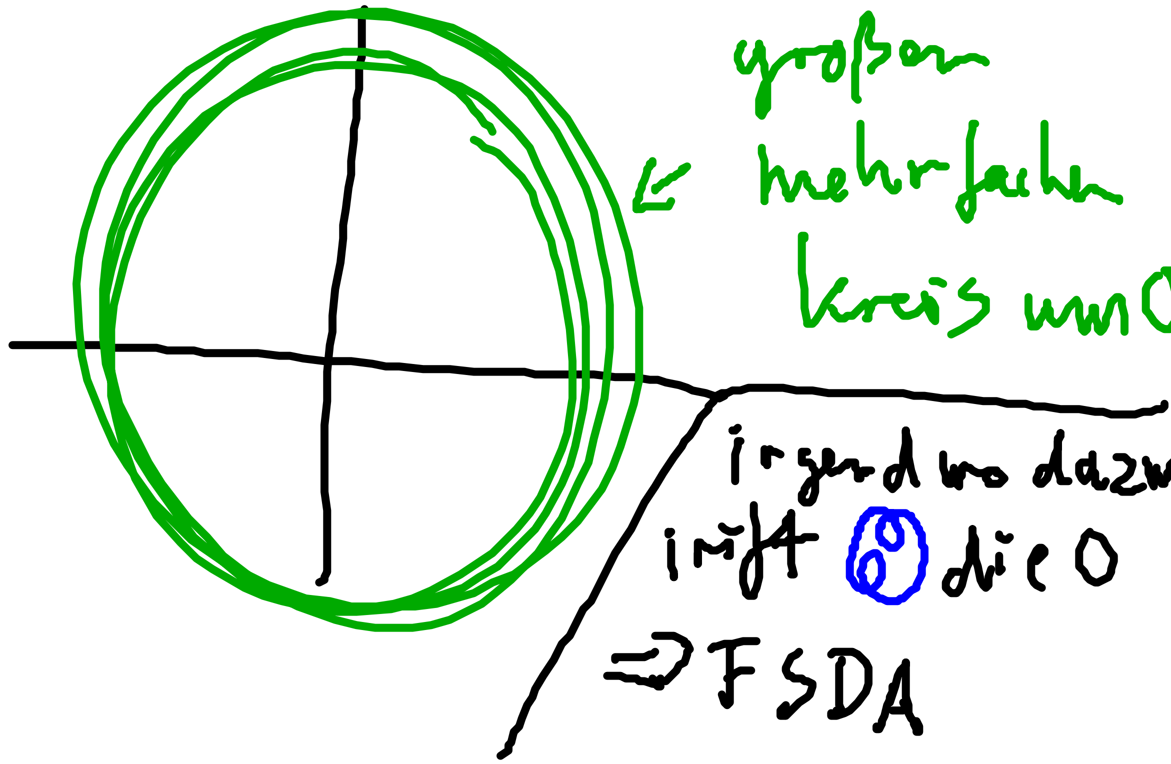
kleiner Kringel um a_0



r sehr groß

x^d dominiert

großer mehrfach Kreis um 0



irgendwo dazwischen trifft die 0

$\Rightarrow$ FSDA

Satz (Folgerung aus dem FSDA)

Sei $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ ein Polynom

$$f(x) = x^d + a_{d-1}x^{d-1} \dots\dots\dots a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$\operatorname{grad}(f) = d \geq 1$$

Dann läßt sich $f(x)$ schreiben als:

$$f(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots\dots\dots (x - x_d)$$ Linearfaktorzerlegung

Wobei $x_0 \dots x_d$ Zahlen aus $\mathbb{C}$ sind

Diese Zahlen sind genau die Nullstellen.

Nullstellen abspalten!

Sei $f(x)$ Polynom von Grad d

$f(x_0) = 0$; x_0 ist Nullstelle:

$\Rightarrow$ $(x-x_0)$ teilt $f(x)$

<u>Bew</u> Annahme $(x-x_0)$ teilt $f(x)$ nicht

$f(x) = (x-x_0) \cdot s(x) + r$ ist $r \in \mathbb{C}$ $r \neq 0$

weil grad(Rest) < 1

grad$(x-x_0) = 1$

$\Rightarrow f(x_0) = \overbrace{(x_0 - x_0)}^{=0} \cdot s(x_0) + r$

$\Rightarrow 0 = r \neq 0$ ↯

Bew von $f(x) = x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \dots + a_1 x + a_0$

lößt sich schreiben als: $f(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{d-1})$

Bew Sei $f(x)$ wie oben aus FSDA folgt

Es ex $x_0 \in \mathbb{C}$ mit $f(x_0) = 0$

$\Rightarrow (x-x_0)$ teilt $f(x)$

$\Rightarrow f(x) = (x-x_0)\cdot s(x)$ ← {grad von s} = d-1

...,... weiter mit Induktion