Derzeit zwei Handlungsstränge:

- Permutationen

  $E_n = \{1, 2, \ldots, n\}$

  bijektive Abb $\pi : E_n \to E_n$ heißt Permutation

- Quotientengruppen / Nebenklassen

  $(G, \circ)$ (kommutative) Gruppe

  $H \subseteq G$ mit $(H, \circ)$ Untergruppe

  $[g]_H = \{g \circ h \mid h \in H\}$ Bem $|H| = |[g]_H|$

  $G/H = \{[g]_H \mid g \in G\}$

1. Nachtrag: Signum einer Permutation

Sei $\pi \in S_n$ eine Permutation.

$\boxed{|S_n| = n!}$

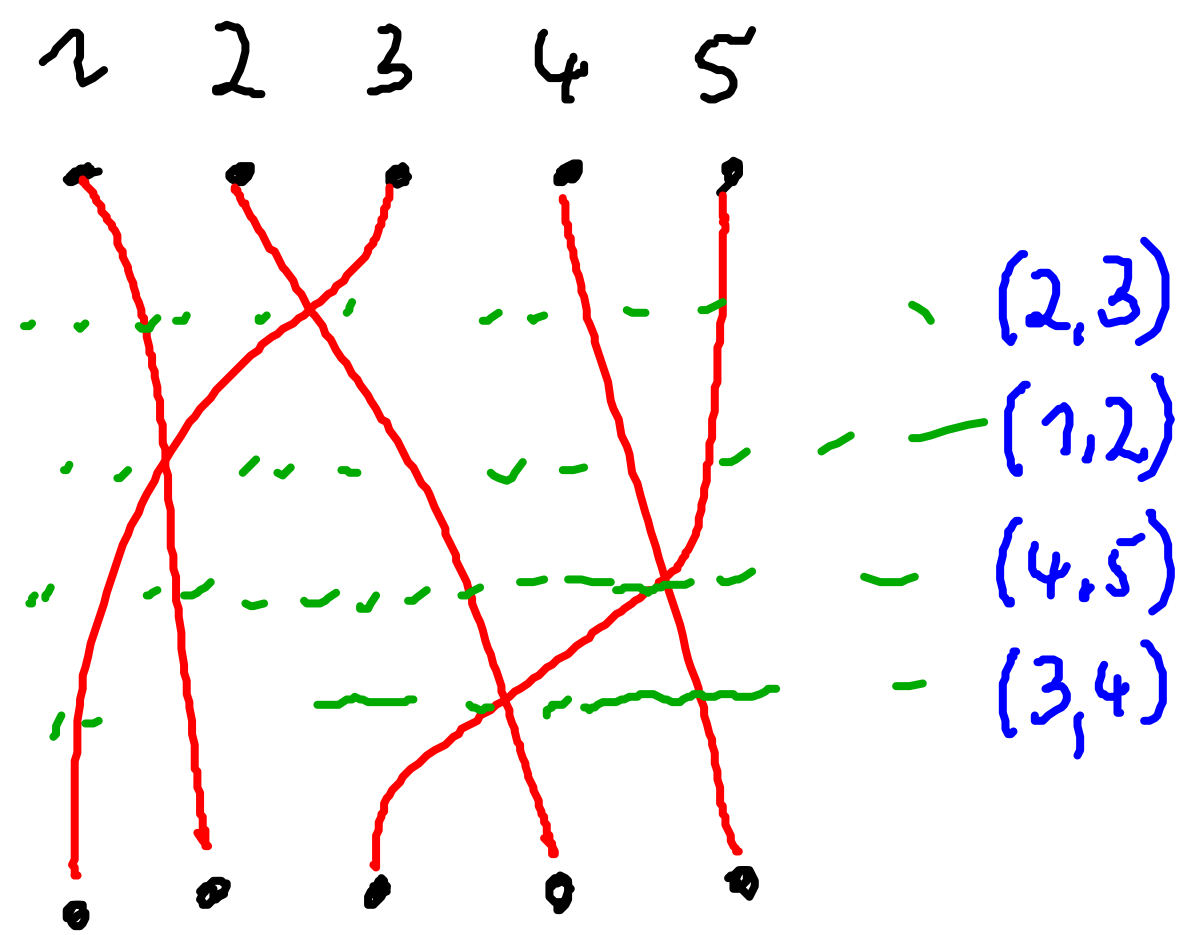
π läßt sich auf viele verschiedene Arten als Hintereinanderausführung von Vertauschungen schreiben

= Transpositionen

= 2-Zykel

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

$= (3\ 4) \circ (4,5) \circ (1,2) \circ (2,3)$



Satz $\pi = t_1 \circ t_2 \dots t_n$ mit t_i, s_i alles Transpositionen

$$= s_1 \circ s_2 \circ \dots \circ s_m$$

dann gilt $(-1)^n = (-1)^m$

Bew: (nicht ganz einfach, hier nicht)

Def: Sei $\pi = t_1 \circ t_2 \circ \dots \circ t_n$ mit Transpos. t_i so ist das Signum von π definiert als

$$\operatorname{sign}(\pi) = (-1)^n$$

Def $FS(\pi) = \{(i,j) \in E_n^2 \mid i<j \text{ und } \pi(i) > \pi(j)\}$

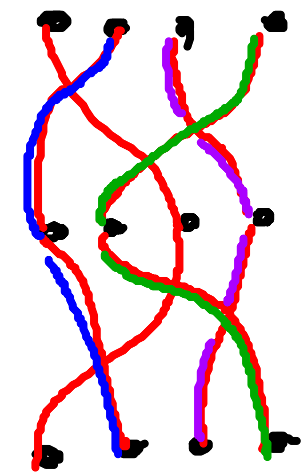
Fehlstände

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \pi$; $FS(\pi) = \{(1,3), (2,3), (2,5), (4,5)\}$

Satz: $\operatorname{sign}(\pi) = (-1)^{|FS(\pi)|}$

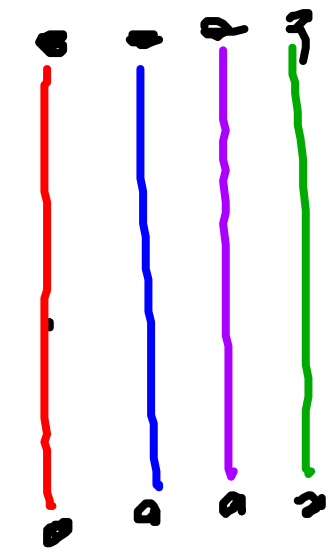
$$= \prod_{i<j} \frac{\pi(i) - \pi(j)}{i - j}$$

Beweisidee (Perm. Diag)

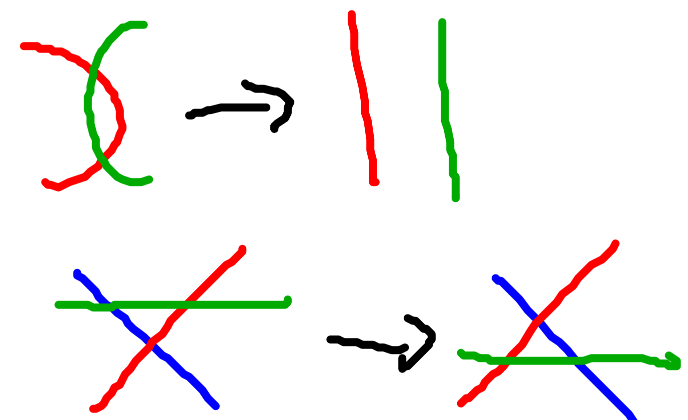


$\pi \circ \pi^{-1} = e$

Entflechten



Elementare Moves



2. Nachtrag: Nebenklassen

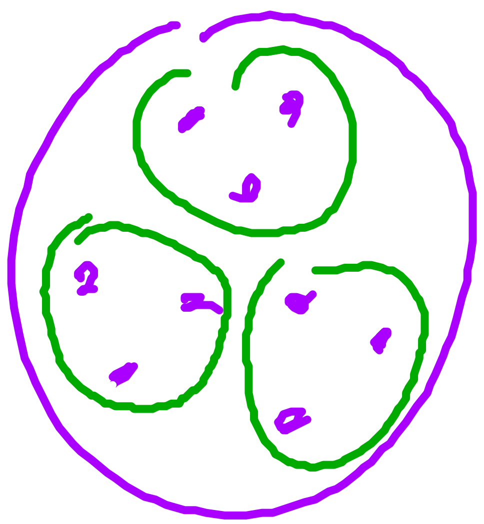
$(G, \circ)$ kommutative Gruppe, H Untergruppe von G

$[g]_H = \{g \circ h \mid h \in H\}$ Nebenklasse von g bzgl H

Bem: Für festes H haben alle $[g]_H$ die gleiche Mächtigkeit

Bew $\varphi: H \to [g]_H$, $h \mapsto g \circ h$ ist Bijektion | denn aus $\varphi(h_1) = \varphi(h_2) \Rightarrow$ $g \circ h_1 = g \circ h_2 \Rightarrow h_1 = h_2$

Satz $\{[g]_H \mid g \in G\}$ bilden eine Partition von G



(zu zeigen $\bigcup_{g \in G} [g]_H = G$

aus $[g_1]_H \cap [g_2]_H \neq \{\}$ folgt $[g_1]_H = [g_2]_H$)

(i) Sei $x \in G$ zeige $x \in \bigcup_{y \in G} [y]_H$

Es gilt $x = x \circ \underset{\in H}{e} \Rightarrow x \in [x]_H$

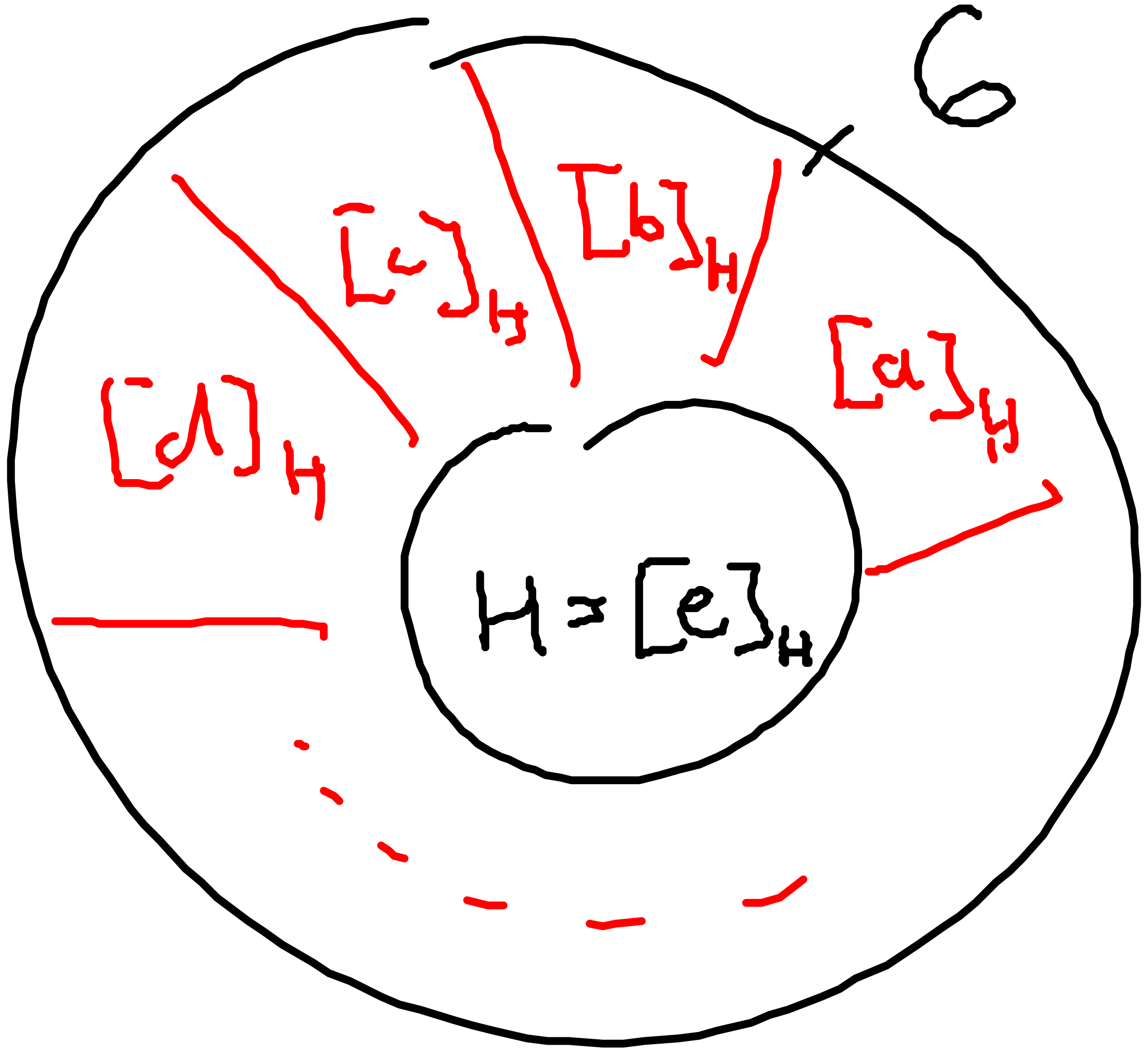
(ii) Sei $[y_1]_H \cap [y_2]_H \neq \{ \}$

$\Rightarrow \exists a : a \in [y_1]_H \cap [y_2]_H \Rightarrow \exists h_1, h_2 \in H : a = g_1 \circ h_1 = g_2 \circ h_2$

$\Rightarrow y_1 = g_2 \circ h_2 \circ h_1' \in [y_2]_H$

Sei $x \in [y_1]_H \Rightarrow x = g_1 \circ h = g_2 \circ \underbrace{h_2 \circ h_1' \circ h}_{\in H} \in [y_2]_H$

$$\left.\begin{array}{l} \text{also } [y_1]_H \subseteq [y_2]_H \\ \text{analog } [y_2]_H \subseteq [y_1]_H \end{array}\right\} \Rightarrow [y_1]_H = [y_2]_H$$



$\Rightarrow$ Für endliche Gruppen

Sei $(G, \circ)$ eine endliche Gr. und $(H, \circ)$ Untergruppe

$\Rightarrow$ $|H|$ teilt $|G|$

Satz von Lagrange

Def N, M Teilmengen von G; $N \circ M = \{n \circ m \mid n \in N, m \in M\}$

Bereits gezeigt:

$$[g_1]_H \circ [g_2]_H = [g_1 \circ g_2]_H$$

Satz $\left(G/H, \circ\right)$ ist eine Gruppe

Bew

(0) Abgeschlossen: $[g_1]_H \circ [g_2]_H = [g_1 \circ g_2]_H$ ✓

(i) neutrales El ist $[e]_H = H$ | $[g]_H \circ [e]_H = [g \circ e]_H = [g]_H$

(ii) Inverses El zu $[g]_H$ ist $[g']_H$ | $[g]_H \circ [g']_H = [g \circ g']_H = [e]_H$

(iii) Assoziativität .... viel Schreibarbeit...

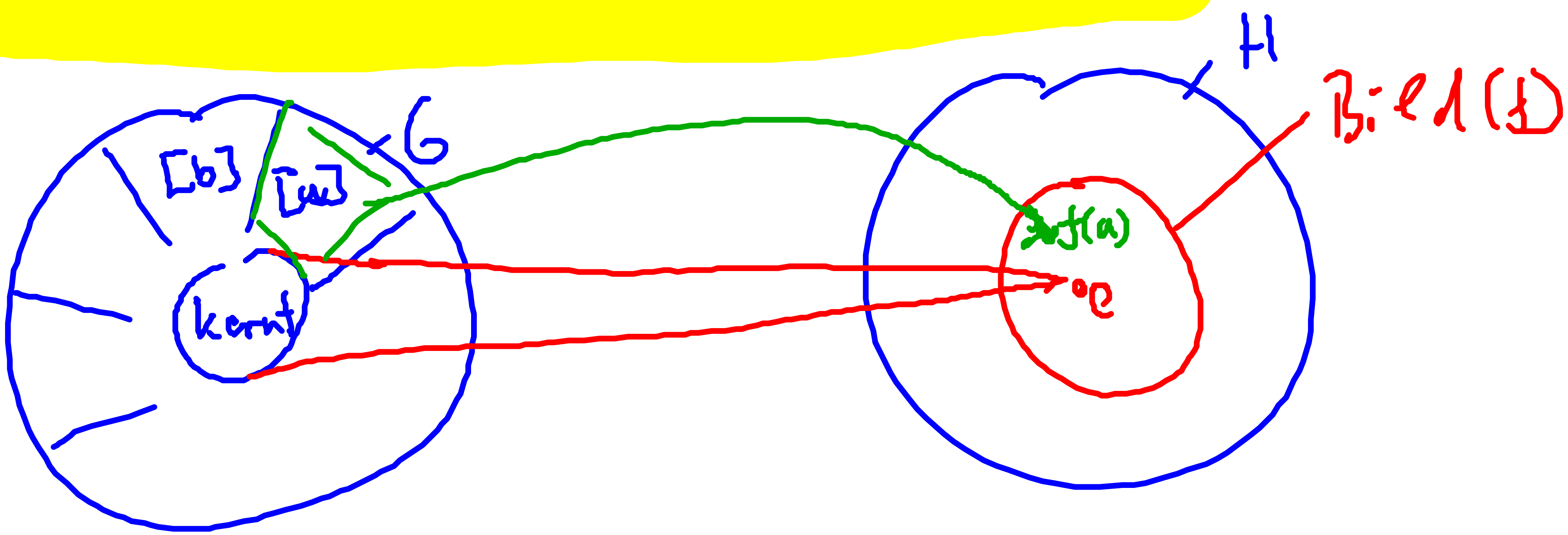
Isomorphiesatz für kommutative Gruppen

$f(g_1 \circ g_2) = f(g_1) \bullet f(g_2)$

Seien $(G, \circ)$ und $(H, \bullet)$ kommutative Gruppen und $f: G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus

dann ist

$$\boxed{G/\ker(f) \cong \mathrm{Bild}(f)}$$



$K = \mathrm{Kern}(f)$

$\varphi : G/_K \to \mathrm{Bild}(f)$

$[g]_K \to f(g)$

Zeige:

(i) φ ist wohldefiniert

(ii) φ ist Homomorphismus

(iii) φ ist Isomorphismus

(i) $[g_1]_K = [g_2]_K \Rightarrow g_1 = g_2 \circ h \; , h \in K$

$\varphi([g_1]_K) = f(g_1) = f(g_2 \circ h) = f(g_2) \bullet f(h) = f(g_2) = \varphi([g_2]_K)$

(ii) $\varphi([g_1]_K \circ [g_2]_K) = \varphi([g_1 \circ g_2]_K) = f(g_1 \circ g_2) = f(g_1) \bullet f(g_2)$

$= \varphi([g_1]) \bullet \varphi([g_2])$

(iii) φ ist surjektiv: sei $b \in \mathrm{Bild}(f) \Rightarrow b = f(g)$

$\Rightarrow b = \varphi([g]_H)$

φ ist injektiv: $\varphi([g_1]_K) = \varphi([g_2]_K) \Rightarrow f(g_1) = f(g_2)$

$\Rightarrow f(g_1 \circ g_2') = e_K \Rightarrow g_1 \circ g_2' \in K \Rightarrow [g_1]_K = [g_2]_K$