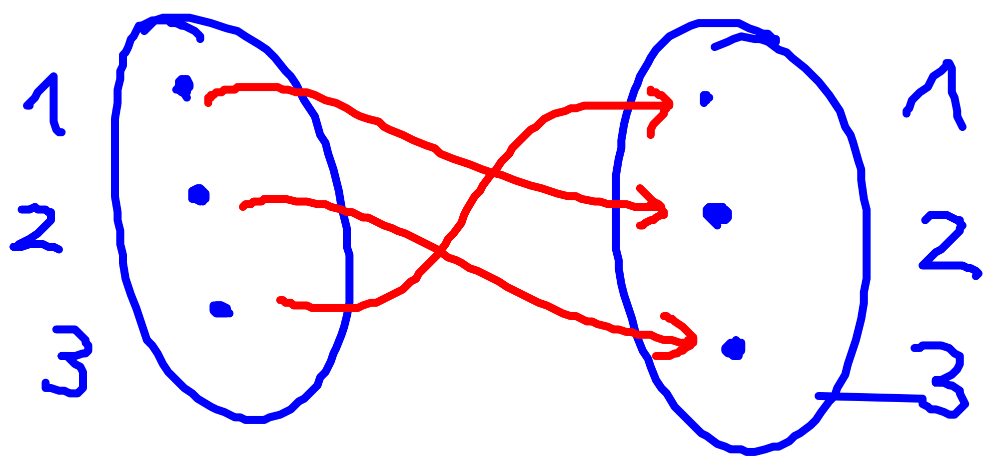
Permutation / Permutationsgruppen
(Vertauschungsgruppen / Symmetrische Gruppen S_n)

Def: Sei $E_n := \{1, 2, 3, \dots, n\}$

Eine bijekte Abbildung $\pi : E_n \to E_n$ nennt man eine Permutation.

Bsp: $E_3 = \{1, 2, 3\}$

$\pi : E_3 \to E_3$



$\pi(1) = 2$

$\pi(2) = 3 \quad \rightsquigarrow \quad \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ Häufige Schreibweise ~~Wertetabelle~~

$\pi(3) = 1$

Hintereinanderausführung von Permutation

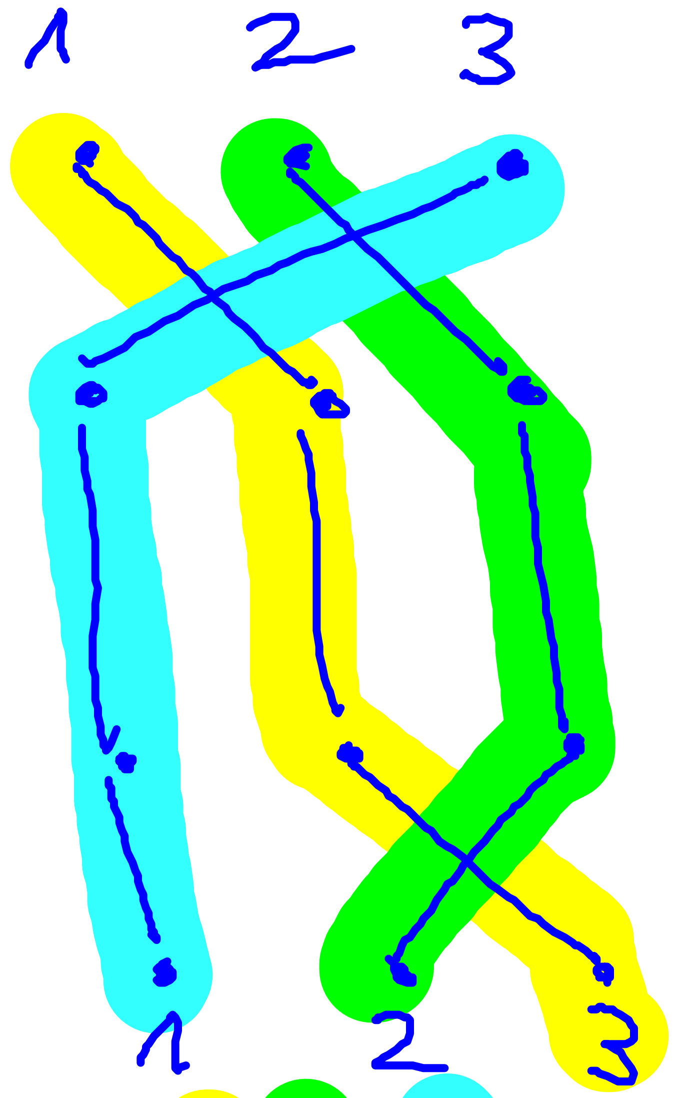
→ $\pi : E_3 \to E_3$

$\pi(1) = 2$

$\pi(2) = 3$

$\pi(3) = 1$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$



→ $\pi' : E_3 \to E_3$

$\pi'(1) = 1$

$\pi'(2) = 3$

$\pi'(3) = 2$

$$\pi' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

→ $(\pi' \circ \pi)(x) = \pi'(\pi(x))$

$(\pi' \circ \pi)(1) = 3$ $\quad (\pi' \circ \pi)(3) = 1$

$(\pi' \circ \pi)(2) = 2$

$$\pi' \circ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Konkretes Beispiel: $S_3 = \{\pi : E_3 \to E_3 \mid \pi \text{ Permutation}\}$

$\pi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\pi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\pi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$\circ$	π_0	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5
π_0	π_0	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5
π_1	π_1	π_0	π_5	π_4	π_3	π_2
π_2	π_2	π_4	π_0	π_5	π_1	π_3
π_3	π_3	π_5	π_4	π_0	π_2	π_1
π_4	π_4	π_2	π_3	π_1	π_5	π_0
π_5	π_5	π_3	π_1	π_2	π_0	π_4

nicht kommutativ!

$\pi_1 \circ \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$\pi_2 \circ \pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Inverse:

a	π_0	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5
a^{-1}	π_0	π_1	π_2	π_3	π_5	π_4

Satz: Die Menge S_n aller Permutationen $\pi : E_n \to E_n$ bildet mit der Hintereinander-ausführung als Operation eine Gruppe.

$\to$ S_n heißt Symmetrische Gruppe

Bew: **(o) Abgeschlossenheit**

Seien $\pi_1, \pi_2 \in S_n$

$\Rightarrow \pi_1, \pi_2$ sind Bijektionen

$\Rightarrow \pi_1 \circ \pi_2$ ist Bijektion

$\Rightarrow \pi_1 \circ \pi_2 \in S_n$

(i) neutrales Element

$\pi_0 : E_n \to E_n$, $x \mapsto x$, $\pi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ ist neutr. Element

Bew: $\pi \in S_n$ $\forall x \in E_n$ $(\pi \circ \pi_0)(x) = \pi(\pi_0(x)) = \pi(x)$

$\Rightarrow \pi \circ \pi_0 = \pi$

(ii) Inverse Elemente

Sei $\pi \in S_n \Rightarrow \pi : E_n \to E_n$ ist bij. Abb

$\Rightarrow$ Es ex. eine eindeutige Umkehrabb. $\pi^{-1} : E_n \to E_n$

Diese Umkehrabb. ist das inv. Element zu π

Bew: $\forall x \in E_n : (\pi^{-1} \circ \pi)(x) = \pi^{-1}(\pi(x)) = x$

$\Rightarrow \pi^{-1} \circ \pi = \pi_0$

Bsp: $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$\pi^{-1} : \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \overset{\text{sort.}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} =: \pi^{-1}$

(iii) Assoziativität

klar (Verknüpfung von Abb.)

Bem:

$$|S_1| = 1 = 1!$$
$$|S_2| = 2 = 2!$$
$$|S_3| = 6 = 3!$$
$$|S_4| = 24 = 4!$$
$$\vdots$$
$$|S_n| = n!$$

denn:

n	Möglichkeiten	für	die	Wahl	von	$\pi(1)$
$n-1$	"	"	"	"	"	$\pi(2)$
$n-2$	"	"	"	"	"	$\pi(3)$
$\vdots$						
2	"	"	"	"	"	$\pi(n-1)$
1	"	"	"	"	"	$\pi(n)$

$\rightsquigarrow$ $n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1 = n!$ Möglichkeiten

Geometrische Deutung von S_3

$(S_3, \circ) \approx$ Symmetriegruppe des gleichseitigen Dreiecks

$\pi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

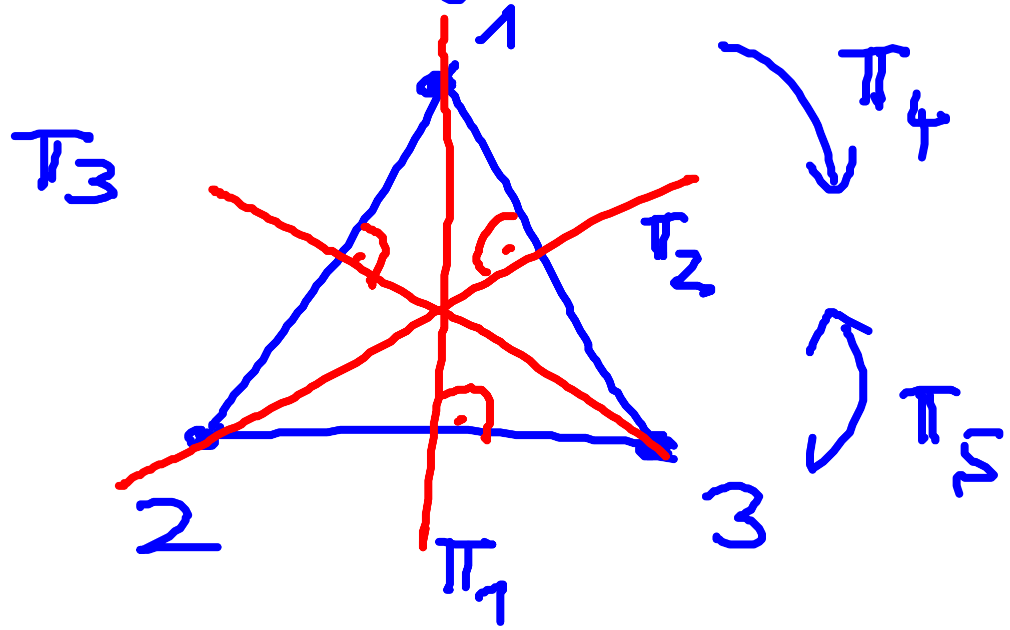
$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\pi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\pi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$



$\pi_0 \approx$ Liegen lassen

$\pi_1 \approx$ Spiegelung an der Höhe durch 1

$\pi_2 \approx$ " " " " " 2

$\pi_3 \approx$ " " " " " 3

$\pi_4 \approx$ Drehung um 120° ↻ 240° ↺

$\pi_5 \approx$ " " 120° ↺

Satz: Jede endliche Gruppe mit n Elementen ist isomorph zu einer Untergruppe der S_n $(S_n, \circ)$

Bew: (durch Angabe eines Isomorphismus)

Sei o.B.d.A. $(G, \cdot)$ eine endliche Gruppe mit $G = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

Definiere $\varphi : G \to S_n$ mit $\pi_g : E_n \to E_n = G$

$g \mapsto \pi_g$ $\qquad$ $i \mapsto g \cdot i$

Bsp: $n = 4$

$\cdot$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	3	4	1
3	3	4	1	2
4	4	1	2	3

$3 \mapsto \pi_3$

$\pi_3 : i \mapsto 3 \cdot i$

$$\pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Nachweis Homomorphismus

zz: $\varphi(g \cdot h) = \varphi(g) \circ \varphi(h)$

$\Leftrightarrow \forall i \in E_n : \big(\varphi(g \cdot h)\big)(i) = \big(\varphi(g) \circ \varphi(h)\big)(i)$

$$
\begin{aligned}
\big(\varphi(g \cdot h)\big)(i) &= \pi_{g \cdot h}(i) \\
&= (g \cdot h) \cdot \bar{i} \\
&= g \cdot (h \cdot \bar{i}) \quad \text{Assoz. in } G \\
&= g \cdot (\pi_h(\bar{i})) \\
&= \pi_g(\pi_h(i)) \\
&= \varphi(g)(\varphi(h)(\bar{i})) \\
&= \big(\varphi(g) \circ \varphi(h)\big)(\bar{i})
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \varphi$ ist ein Homomorphismus.

Bild eines Gruppenhom. ist wieder eine Gruppe.

Zyklenschreibweise von Permutationen

Die Folge

$$\left[\begin{array}{l} i \mapsto \pi(i) \mapsto \pi(\pi(i)) \ldots \mapsto \ldots \\ i \mapsto \pi(i) \mapsto \pi^2(i) \mapsto \ldots \mapsto \pi^{k-1}(i) \end{array}\right] \mapsto$$

läuft in einen Zyklus der Länge k, $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$

d.h.: $\exists k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $\pi^k(i) = i$

Bsp: $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 7 & 6 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

$1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 1$ $\quad (1\,2\,3)$ 3-Zyklus

$4 \mapsto 5 \mapsto 7 \mapsto 8 \mapsto 4$ $\quad (4\,5\,7\,8)$ 4-Zyklus

$6 \mapsto 6$ $\quad$ 1-Zyklus

$\pi = (1\,2\,3) \circ (4\,5\,7\,8) \circ \cancel{(6)}$

Bsp: S_7 $\pi = (3\,6\,5)$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 6 & 4 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Transpositionen

Def: Ein Zyklus der Länge 2 heißt Transposition

$\longrightarrow$ Eine Transposition vertauscht 2 Elemente

$$(i\ j) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & j & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix}$$

Es gilt: Jeder Zyklus $\pi = (a_1 a_2 \dots a_k)$ läßt sich als Komposition von Transpositionen schreiben:

$$\pi = (a_1 a_2 \dots a_k) = (a_1 a_2) \circ (a_2 a_3) \circ \dots \circ (a_{k-1} a_k)$$

Bsp: $\pi = (1\,5\,4\,7) = (1\,5)\circ(5\,4)\circ(4\,7)$

Satz: Jedes Element der S_n $(n \geq 2)$ lässt sich als Hintereinanderausf. von Transposition schreiben.

Bew: durch Angabe eines Algorithmus

Permutation $\rightsquigarrow$ Zyklen $\rightsquigarrow$ Transpositionen

Bsp: $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$= (1\,4\,3\,2) = (1\,4)\circ(4\,3)\circ(3\,2)$

Es gilt auch

$= (3\,4)\circ(2\,3)\circ(1\,2)$

Das Signum einer Permutation

Es gilt: Die Darstellung von $\pi \in S_n$ $(n \geq 2)$ als Hintereinanderausführung von Transpositionen ist nicht eindeutig, die Anzahl der verwendeten Transpositionen ist nicht eindeutig, aber die Parität der Anzahl der verwendeten Transpositionen ist eindeutig.

Bem: Unter Parität versteht man die Eigenschaft einer ganzen Zahl, gerade oder ungerade zu sein.

Def: Signum einer Permutation $\pi \in S_n$ $(n \geq 2)$

Sei $\pi \in S_n$ $(n \geq 2)$.

Anzahl

$$\text{sign}(\pi) = (-1)^{\#\text{ Transpositionen}}$$

Bsp: $\text{sign}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right) = (-1)^3 = -1$

Bsp: $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 6 & 2 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix} = (1\,3\,6) \circ (2\,4) \circ (5\,7)$

$= (1\,3) \circ (3\,6) \circ (2\,4) \circ (5\,7)$

es gilt auch

$= (5\,6) \circ (6\,7) \circ (1\,2) \circ (2\,3) \circ (3\,4) \circ (4\,5) \circ (5\,6) \circ (1\,2) \circ (2\,3) \circ (3\,4)$

$\text{sign}(\pi) = (-1)^4 = (-1)^{10} = 1$