Gruppenhomomorphismus:

Trivialen Homomorphismus: $f(x) = e_H$

Gegeben: zwei Gruppen $(G, \circ)$, $(H, \bullet)$

$f: G \to H$ ist Homomorphismus g.d.w

für alle $x, y \in G$: $f(x \circ y) = f(x) \bullet f(y)$

Ein Homomorphismus ist eine strukturerhaltende Abb zwischen Gruppen.

Zwei Gruppen $(G, \circ)$, $(H, \bullet)$ heißen isomorph (strukturgleich) falls ein Gruppenhomomorphismus $f: G \to H$ existiert der bijektiv ist.

Isomorphismus $\Longleftrightarrow$ Umbenennung der Gruppenelemente

1. Beispiel

$\circ$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$G = \{0, 1, 2\}$

$\varphi : G \to H$

$0 \mapsto r$

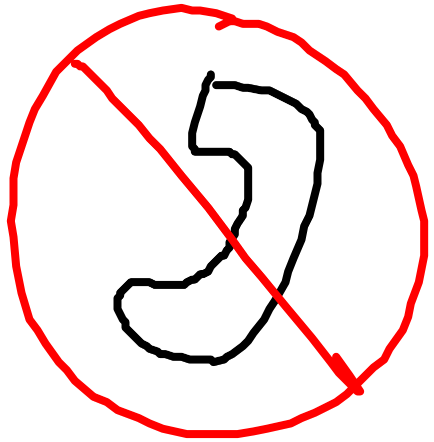
$1 \mapsto g$

$2 \mapsto b$

bijektiv

$\bullet$	r	g	b
r	r	g	b
g	g	b	r
b	b	r	g

$H = \{r, g, b\}$



Bsp. für zwei Elemente: $g_1 = 1$, $g_2 = 2$

$$\varphi(g_1 \circ g_2) = \varphi(g_1) \bullet \varphi(g_2)$$

$$= \varphi(1 \circ 2) \qquad = \varphi(1) \bullet \varphi(2)$$

$$= \varphi(0) \qquad = g \bullet b$$

$$= r \qquad = r$$

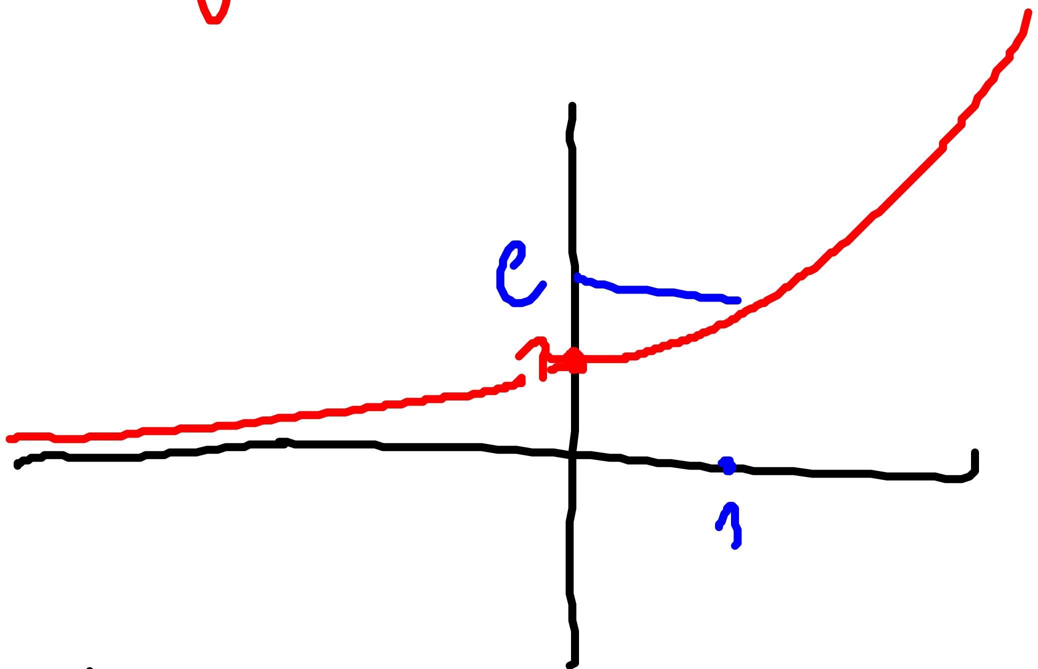
2. Beispiel

$(\mathbb{R},+)$ und $(\mathbb{R}^+,\cdot)$ sind isomorph

$\mathbb{R}^+ = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > 0\}$

Bem Betrachte folgende Bijektion

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$
$$a \mapsto e^x$$



$$f(a+b) = e^{a+b} = e^a \cdot e^b = f(a) \cdot f(b)$$

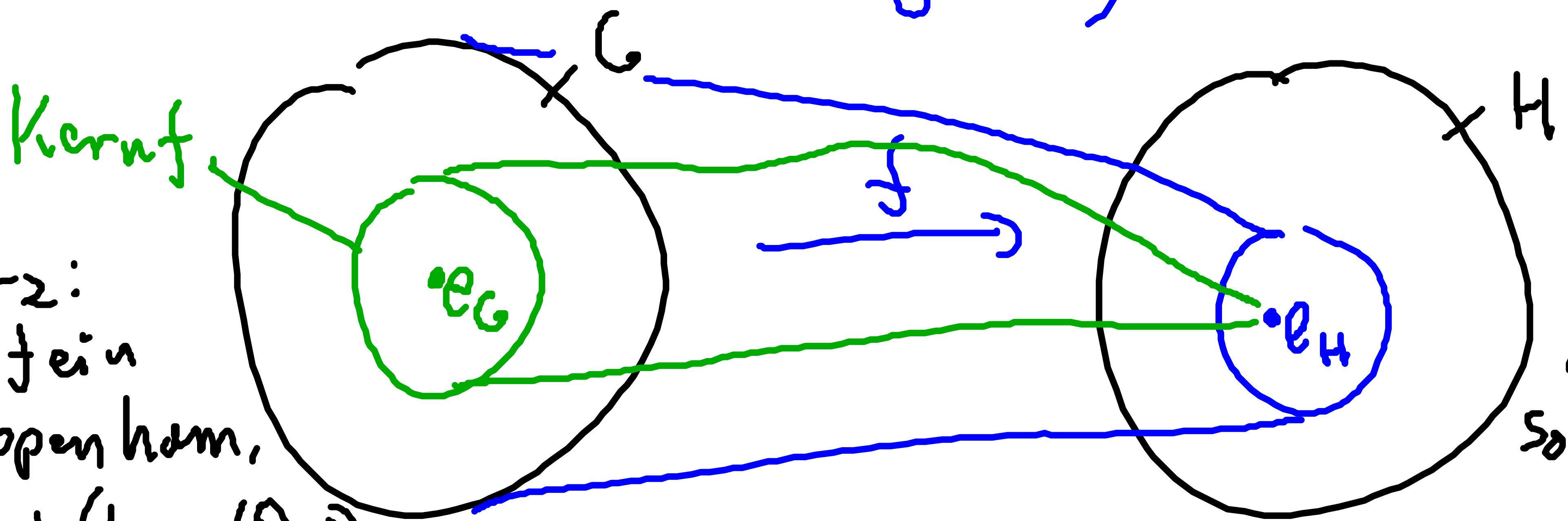
$\Rightarrow$ Anwendung Rechenschieber

Kern und Bild einer Abbildung:

$f: G \to H$ $\quad$ $(G,\circ),\ (H,\bullet)$ seien Gruppen

Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{Kern}(f) = \{\, g \in G \mid f(g) = e_H \,\} \subseteq G$$
$$\mathrm{Bild}(f) = \{\, f(g) \mid g \in G \,\} \subseteq H$$



Satz: ist f ein Gruppenhom., so ist $(\mathrm{Kern}(f),\circ)$ eine UG von $(G,\circ)$

Satz: Ist f ein Gruppenhom., so ist $(\mathrm{Bild}(f),\bullet)$ eine UG von $(H,\bullet)$

Satz Ist f ein Gruppenhomomorphismus $f: G \to H$ so ist $(\mathrm{kern}(f), \circ)$ eine Untergr. von $(G, \circ)$

Bew (0) Abgeschl. Sei $g_1, g_2 \in \mathrm{kern}(f)$

d.h. $f(g_1) = e_H$, $f(g_2) = e_H$

$$f(g_1 \circ g_2) = f(g_1) \bullet f(g_2) = e_H \bullet e_H = e_H$$

$$\Rightarrow g_1 \circ g_2 \in \mathrm{kern}(f).$$

(i) $e_G \in \mathrm{kern}(f)$ $\quad f(e_G) = f(e_G \circ e_G) = f(e_G) \bullet f(e_G)$

$\Rightarrow$ $f(e_G) = e_H$

wg Eindeutigkeit von e_H

(ii) Zeige aus $g \in \mathrm{kern}(f) \Rightarrow g' \in \mathrm{kern}(f)$

$$e_H = f(e_G) = f(g' \circ g) = f(g') \bullet f(g) = f(g') \bullet e_H \Rightarrow f(g') = e_H$$

(iii) Assoziativität wird vererbt.

$(G, \circ)$ sei kommutative Gruppe H sei Untergruppe von G

$$g \circ H := \{ g \circ h \mid h \in H \} \subseteq G$$ (links-) Nebenklasse von g bzgl H

$$=: [g]_H$$

$$G/H := \{ g \circ H \mid g \in G \}$$ ← Menge von Nebenklassen (Menge von Teilmengen von G)

„Quotientengruppe von G nach H"

Def: Seien $N, M \subseteq G$; $(G, \circ)$ sei Gruppe

$$N \circ M = \{ n \circ m \mid n \in N, m \in M \}$$

Satz: $[g_1]_H \circ [g_2]_H = [g_1 \circ g_2]_H$

Bew: „$\subseteq$" $g \in [g_1]_H \circ [g_2]_H = (g_1 \circ H) \circ (g_2 \circ H)$

$\Rightarrow \exists\, h_1, h_2 \in H$ mit

$$g = (g_1 \circ h_1) \circ (g_2 \circ h_2) = (g_1 \circ g_2) \circ \underbrace{(h_1 \circ h_2)}_{\in H}$$

$\Rightarrow g \in [g_1 \circ g_2]_H$

„$\supseteq$" Sei $g \in [g_1 \circ g_2]_H \Rightarrow \exists\, h$ mit

$$g = (g_1 \circ g_2) \circ h = (g_1 \circ e_H) \circ (g_2 \circ h) \in [g_1]_H \circ [g_2 \circ]_H$$

$(G/H, \circ)$ ist wieder eine Gruppe

Op auf Mengen!

Bsp $(G,\circ) = (\mathbb{Z},+)$; $H = (k\cdot\mathbb{Z},+)$; $k=5$

$$\mathbb{Z}/5\cdot\mathbb{Z} = \{n+5\mathbb{Z} \mid n\in\mathbb{Z}\} = \{0+5\mathbb{Z},\ 1+5\mathbb{Z},\ 2+5\mathbb{Z},\ 3+5\mathbb{Z},\ 4+5\mathbb{Z}\}$$

$$\mathbb{Z} = \ldots, -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots$$

$0+5\mathbb{Z} =$	$\ldots$	-10	-5	0	5	$10 \ldots$
$1+5\mathbb{Z} =$	$\ldots$	-9	-4	1	6	$11 \ldots$
$2+5\mathbb{Z} =$		-8	-3	2	7	$12 \ldots$
$3+5\mathbb{Z} =$	$\ldots$	-7	-2	3	8	$\ldots$
$4+5\mathbb{Z} =$		-6	-1	4	9	$\ldots$

$\{0,1,2,3,4\} \sim \mathbb{Z}_5$

$$(1+5\mathbb{Z}) + (3+5\mathbb{Z}) = 4+5\mathbb{Z} \qquad (1 \oplus 3 = 4)$$

$(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z},+)$ ist isomorph $(\mathbb{Z}_5, \oplus_5)$

Bem: Menge der Nebenklassen $\{g \circ H \mid g \in G\}$ bildet eine Partition von G

Def: Sei M eine Menge $M_1, M_2, \ldots, M_k \subseteq M$

$M_1 \ldots M_k$ sind Partition wenn:

(i) $M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k = M$

(ii) $M_i \cap M_j = \{\}$ für $i \neq j$