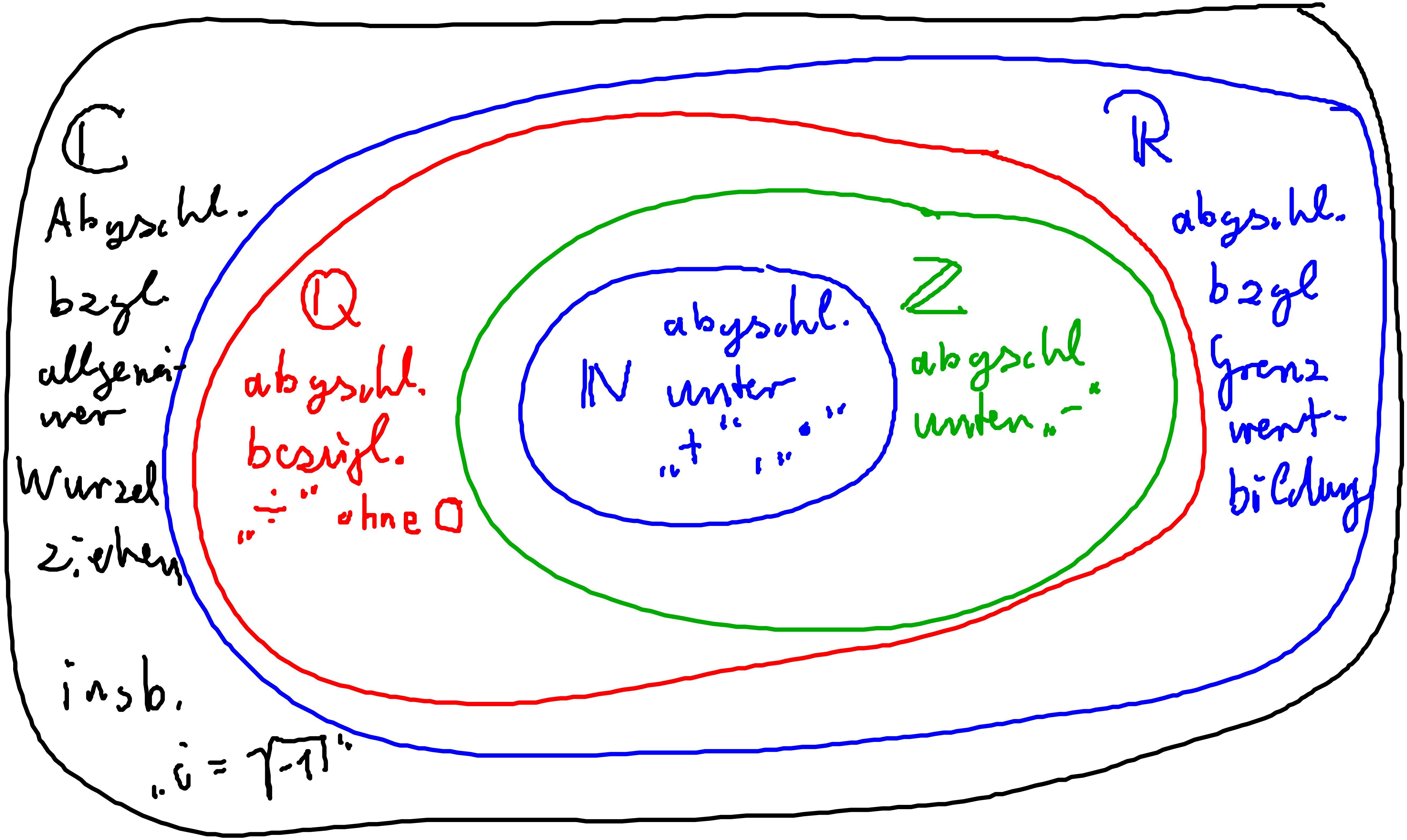
Zahlenbereiche: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$



Schreibweisen (Konventionen für die Vorlesung)

Funktionen werden angegeben durch

- Definitionsbereich (von wo)
- Wertebereich (nach wohin)

$$f : D \longrightarrow W$$

Zusätzlich (evtl.)

- Eigenschaften der Fkt. (z.B. Linearität)
- Abbildungsvorschrift (z.B. $x \longmapsto x^2+2$)

Schreibweisen:

Kartesisches Produkt von Mengen

$A, B, C, \ldots$ seien Mengen

$A \times B := \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$ alle Paare aus A und B

$A \times B \times C := \{(a,b,c) \mid a \in A, b \in B, c \in C\}$ Tripel

$\vdots$

Wichtiger Spezialfall: $A = B = C = \ldots$

$$\underbrace{A \times A \times A \times \ldots \times A}_{n\text{-mal}} = A^n$$

1. Allgemeine algebraische Strukturen

Gruppen, Ringe, Körper

1.1 Gruppen

Wichtige Rechenregeln für „+" und „−" über $\mathbb{Z}$

(0) Für $a, b \in \mathbb{Z}$ ist $a+b \in \mathbb{Z}$ | Abgeschlossen $+: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

(i) Es gibt eine Zahl (nämlich die „0") mit $0+a=a$ für alle $a \in \mathbb{Z}$ | „0" ist neutrales Element

(ii) Zu jeder Zahl $a \in \mathbb{Z}$ gibt es eine Zahl $(-a)$ mit $(-a)+a=0$ | Zu jeder Zahl gibt es ein „Inverses"

(iii) Für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$ gilt $(a+b)+c = a+(b+c)$ | Assoziativität

Allgemeine Gruppendefinition:

Gruppe: Sei G eine Menge und $\circ$ eine

(o) Abbildung $\circ: G \times G \to G$

$(a,b) \mapsto a \circ b$

NB
$\circ((a,b)) =: a \circ b$

$(G, \circ)$ ist Gruppe genau dann wenn:

links neutrales El.

(i) Es gibt $e \in G$ mit $e \circ g = g$ für alle $g \in G$

(ii) Es sei e aus (i) fest gegeben
Für alle $g \in G$ existiert $g' \in G$ mit $g' \circ g = e$

Linksinverses zu g.

(iii) Für alle $a, b, c \in G$ gilt
$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ Assoziativ

Beispiele für Gruppen:

$(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{C},+)$ sind Gruppen

$(\mathbb{N},+)$ ist <u>keine</u> Gruppe

$(\mathbb{Q}-\{0\},\cdot)$ ist Gruppe (ebenso $(\mathbb{R}-\{0\},\cdot)$ $(\mathbb{C}-\{0\},\cdot)$)

$\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^3$ ist Gruppe mit

$$(a_1,b_1,c_1)+(a_2,b_2,c_2)=(a_1+a_2,\, b_1+b_2,\, c_1+c_2)$$

Neutrales El: $e=(0,0,0)$

Inverses zu (a,b,c) ist $(-a,-b,-c)$

Direktes Produkt von Gruppen:

Seien $(G_1, \circ_1), (G_2, \circ_2), \ldots, (G_n, \circ_n)$ Gruppen

Dann ist $(G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n, \circ)$ eine Gruppe mit

$$(g_1, g_2, \ldots, g_n) \circ (h_1, \ldots, h_n) = (g_1 \circ_1 h_1, g_2 \circ_2 h_2, \ldots, g_n \circ_n h_n)$$

mit $g_i, h_i \in G_i$ für $i = 1 \ldots n$

Neutrales El: $(e_1, e_2 \ldots e_n)$

Inverses zu $(g_1, g_2 \ldots g_n)$ ist $(g_1', g_2' \ldots g_n')$

mit $g_i' \circ_i g_i = e_i$

Wichtiges Beispiel

$G_1 = G_2 = G_3 \ldots\ldots = G_n = \mathbb{R}$

$\circ_1 = \circ_2 \ldots\ldots\ldots = \circ_n =$ „$+$"

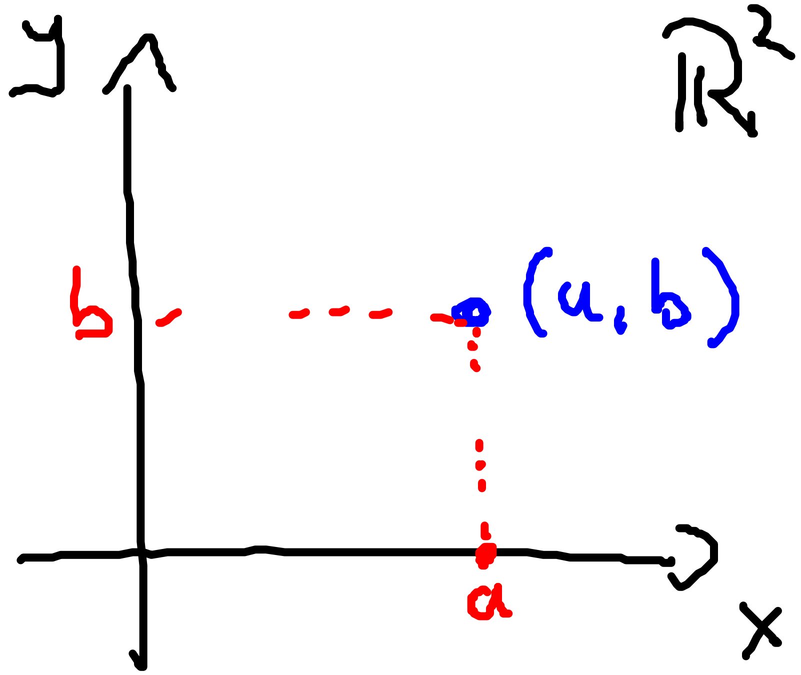
Produktgruppe

$$(\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots\ldots \times \mathbb{R}}_{n\text{-mal}}) = \mathbb{R}^n$$

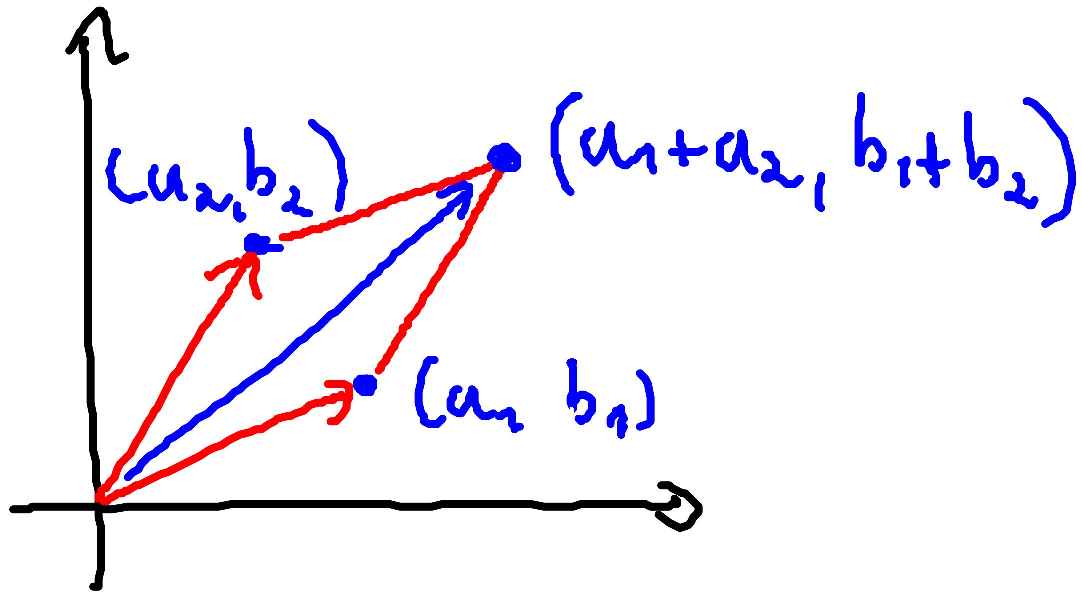
mit komponentenweiser Addition

$$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$$

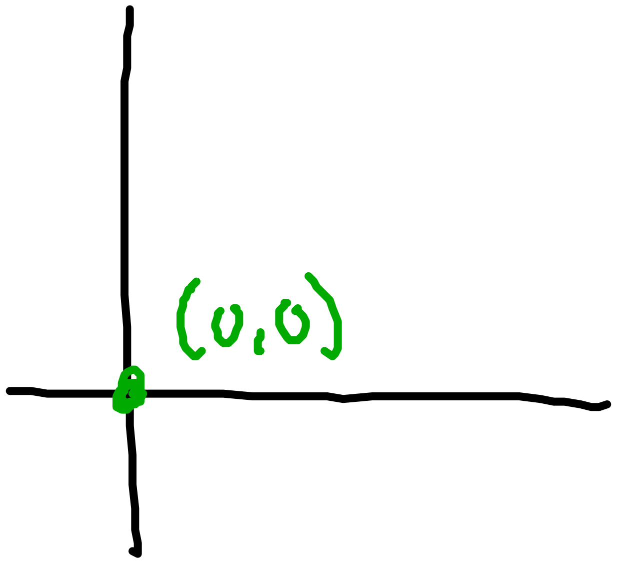
Geometrische Interpretation von $\mathbb{R}^2$



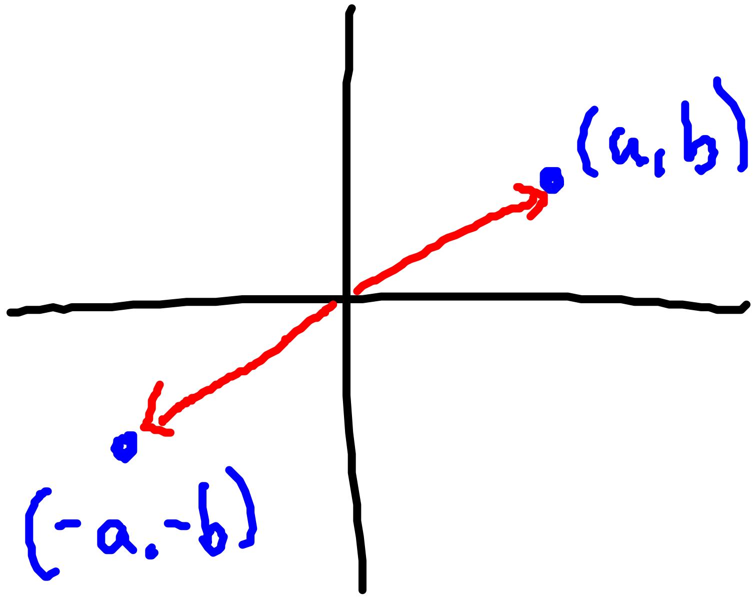
Addition



Neutrales El:



Inverses El

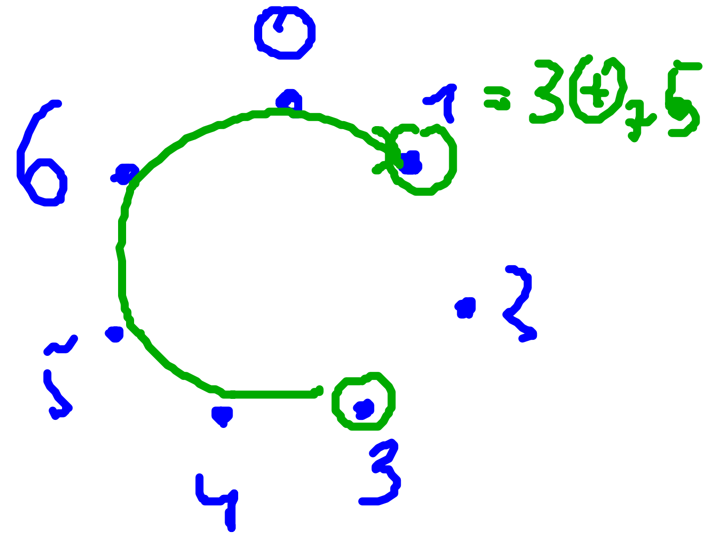


Assoziativ

......

Weitere Beispiele:

$$G = \{7 \cdot a \mid a \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -14, -7, 0, 7, 14, 21, \dots\}$$
$$= 7\mathbb{Z}$$



$(7\mathbb{Z}, +)$ ist Gruppe

$$\mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$a \oplus_7 b = (a+b) \bmod 7$$

$$3 \oplus_7 5 = 1$$

$(\mathbb{Z}_7, \oplus_7)$ ist Gruppe

Iner Rest

$e = 0$

a	0	1	2	3	4	5	6
a'	0	6	5	4	3	2	1

$a \odot_7 b = (a \cdot b) \bmod 7$

$3 \odot_7 5 = 1$

$(\mathbb{Z}_7 - \{0\}, \odot_7)$ ist Gruppe

$e = 1$

a	1	2	3	4	5	6
a'	1	4	5	2	3	6

Allgemein:

$(\mathbb{Z}_p, \oplus_p)$ ist Gruppe für alle $p \in \mathbb{N} - \{0\}$

$(\mathbb{Z}_p - \{0\}, \odot_p)$ ist Gruppe wenn p ist Primzahl