Lineare Algebra I

← Was?

← Warum?

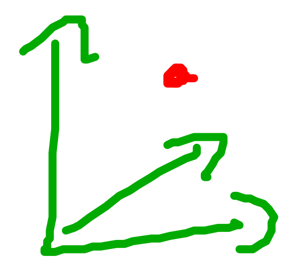
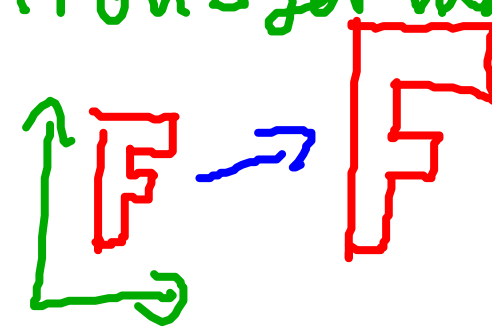
Lineare:
- → geradlinig
  Strukturtheorie von Geraden, Ebenen, Punkten, ...
- → Polynome vom Grad 1 in jeder Variable (viele Variablen)

Algebra:
- Rechnen mit abstrakten Strukturen
- Strukturtheorie des Rechnens.
- Axiomatischer Aufbau

+ analytische Geometrie

Literatur:
Fischer: Lineare Algebra

Was?

Abstrakt	Konkret: algebraisch + algorithmisch	konkrete geom. Objekte
Vektorraum V (axiomatisch festgelegt)	$\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{C}^d$, Menge aller Polynome	z.B. dreidimensionale Raum.
Vektor $v \in V$	z.B. konkrete Zahlenvektoren $(1,2,3)$	 ein Punkt im Raum
Lineare Abb. $f: V \to W$, $f(v_1+v_2) = f(v_1)+f(v_2)$, $f(\lambda v) = \lambda f(v)$	repräsentiert z.B. durch Matrizen $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+7y+2z \\ 1x+4y+1z \end{pmatrix}$	Transformationen 
$\text{Kern}(f) = \{v \in V \mid f(v)=0\}$	Lösen von Gleichungssystemen	Ebenen, Räume, ..

Zentrale Problemstellungen:

- Strukturtheorie
  Am Anfang stehen Axiome
  ⋮
  Was folgt aus den Axiomen?
  ⋮
  Welche Begriffe sind noch Einzuführen?
- Innermathematische Beispiele
  (welche VR gibt es, welche Besonderheiten haben die?)
- Außermathematische Beispiele
  Anwendungen
- Algorithmen

Warum?

- Weitreichende strukturelle Erkenntnisse
- LA ist algorithmisch gutartig
- Lösungsgebilde sind gutartig
- Viele Probleme in der ....
  ...Physik, Informatik, Mathematik...,
  sind linear.
- Viele Probleme sind linearisierbar
- Stückweise lineare Ansätze

Einige Beispiele! Wir nehmen den Apparat der LA als „Black Box"

1. Beispiel: geometrische Transformationen

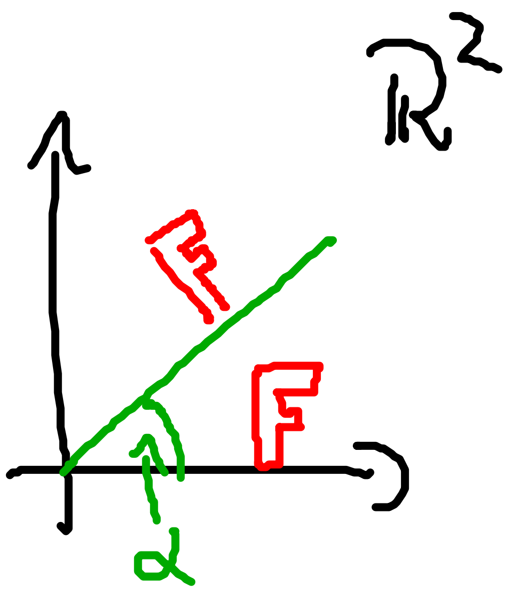


Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

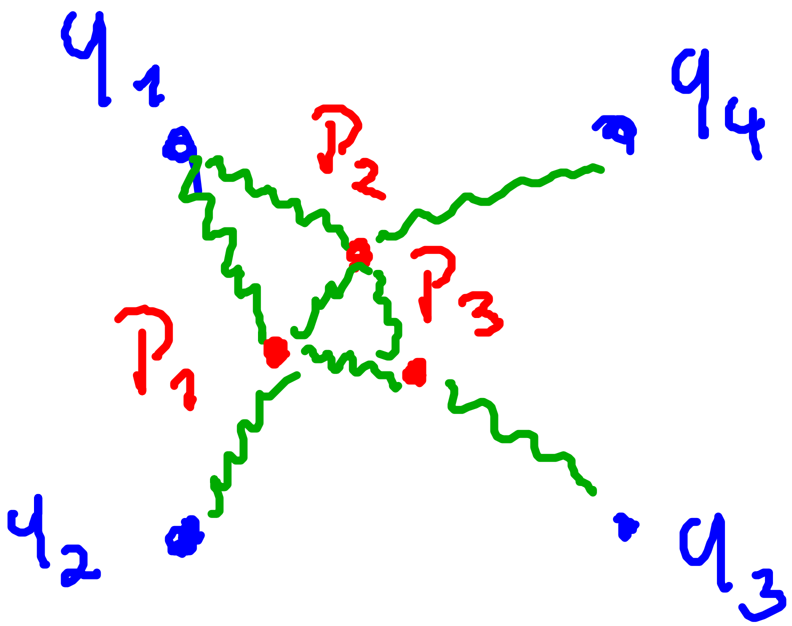
Drehung: $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = M_\alpha$

Drehmatrix

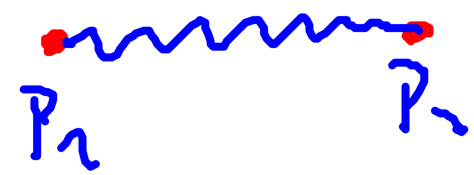
$v \mapsto M_\alpha \cdot v$

Inverse zu M_α ist $M_{-\alpha}$

2. Beispiel: Aus der Physik – Federnetze



Federkraft: $F = h(p_1 - p_2)$



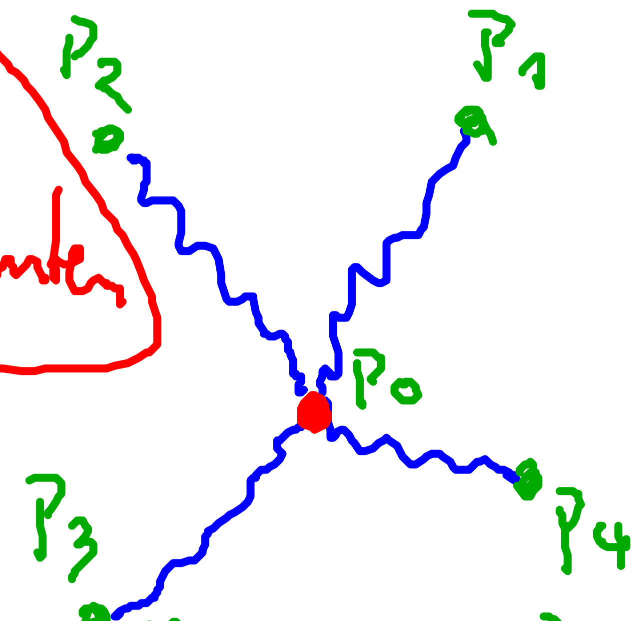
$h = 1$

Sechs Gleichungen in Sechs Unbekannten

$$q_1 + q_2 + p_2 + p_3 - 4p_1 = 0$$

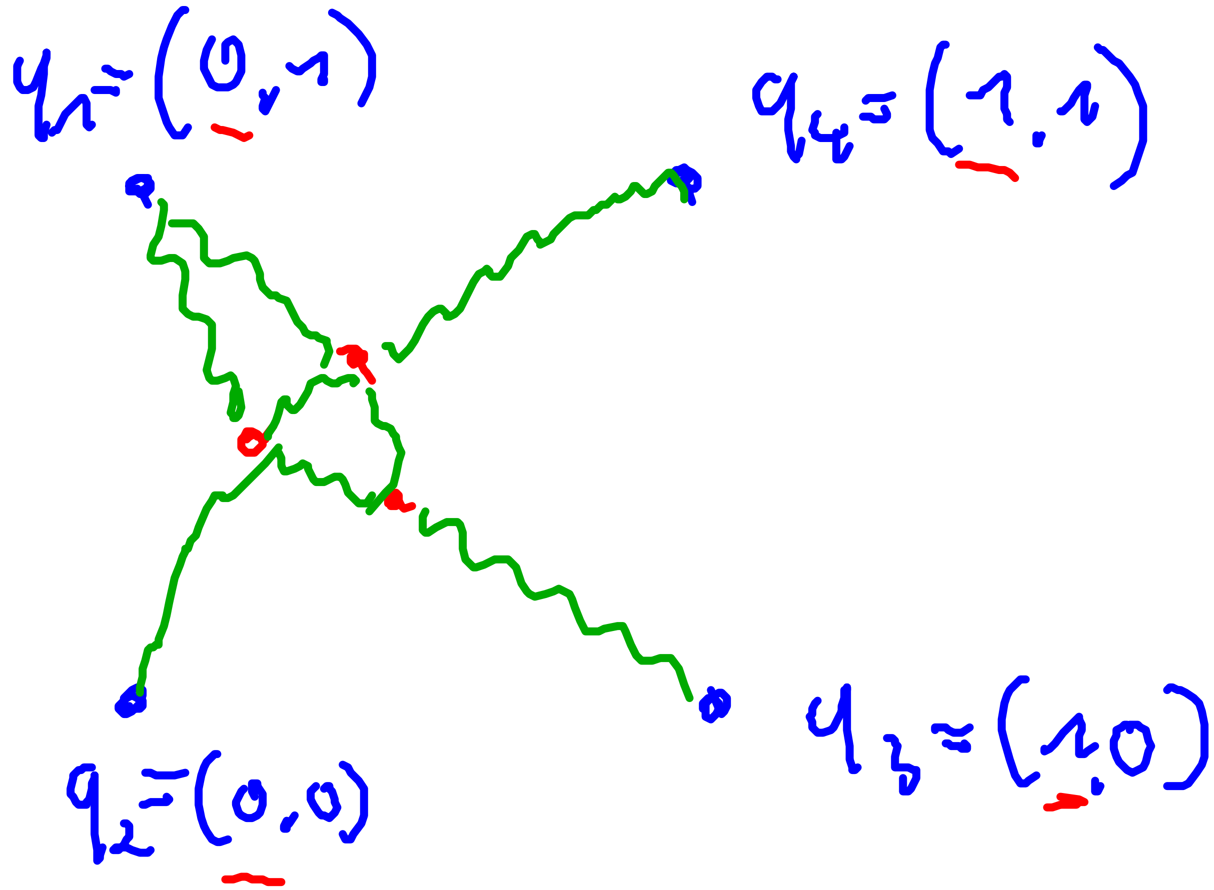
$$q_1 + q_4 + p_1 + p_3 - 4p_2 = 0$$

$$q_3 + p_1 + p_2 - 3p_3 = 0$$



$$F_{ges} = \sum_{i=1}^{n} h(p_i - p_0) = 0$$

Gleichgewicht



x-Koordinate:

$$x_3 + x_2 - 4x_1 = 0$$

$$x_1 + x_4 + 1 - 4x_2 = 0$$

$$x_1 + 1 + x_2 - 3x_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$