Letztes Mal: Diagonalisierung

A sei $n \times n$ Matrix

Besitzt K^n eine Basis aus Eigenvektoren von A (Basis sei $(v_1 \ldots\ldots v_n)$)

so ist für $S = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \ldots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$

$S^{-1} A S = D$ eine Diagonalmatrix mit entsprechenden Eigenwerten auf der Diagonalen.

Umgekehrt $A = S D S^{-1}$

$$\boxed{A v_i} = S D \underbrace{S^{-1} v_i}_{e_i} = S \underbrace{D e_i}_{\lambda_i e_i} = \lambda_i \underbrace{S e_i}_{v_i} = \boxed{\lambda_i v_i}$$

Wichtige Anwendung: lineare Differentialgleichungssysteme

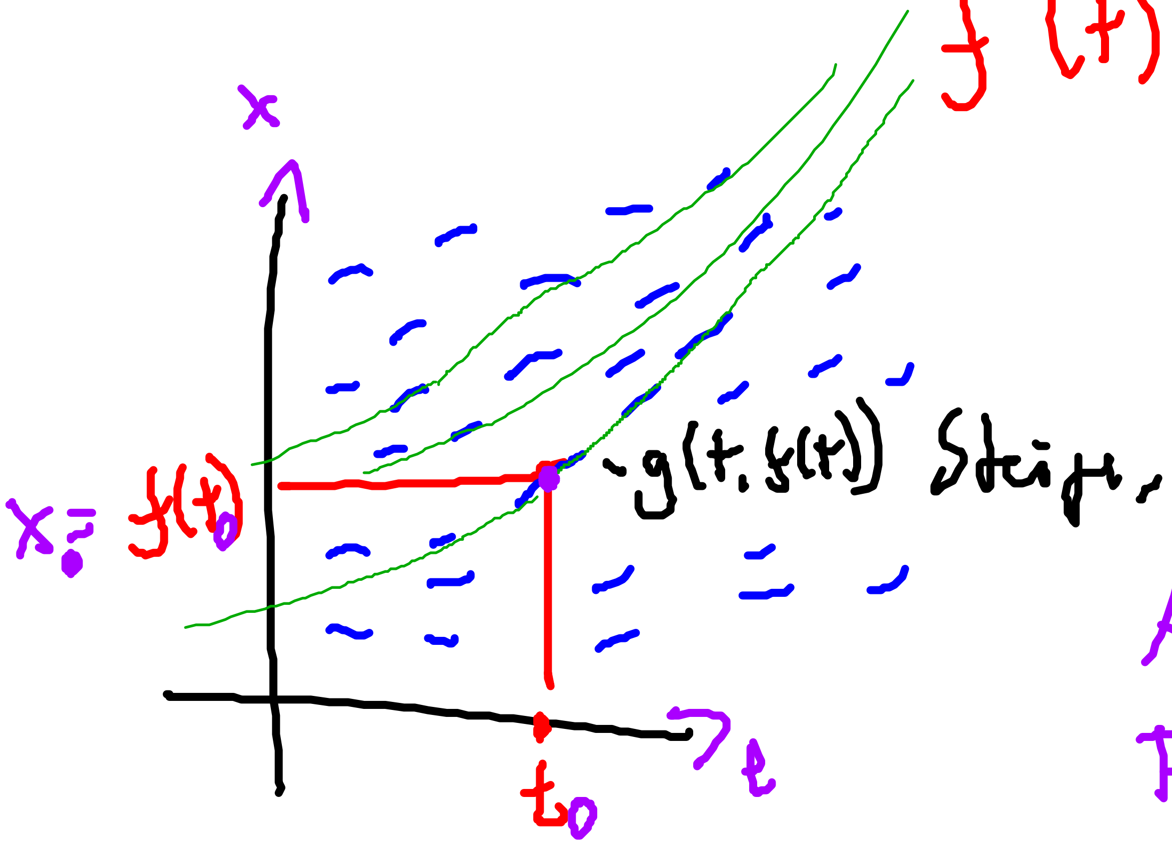
Differentialgleichung (zunächst in einer reellen Variable):

gesucht Funktion: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$t \to f(t)$

die eine Bedingungsgleichung für $f'(t)$ erfüllt;

$$f'(t) = g(t, f(t))$$

$\Leftarrow$ Steigung wird durch aktuellen t-Wert und Funktionswert bestimmt

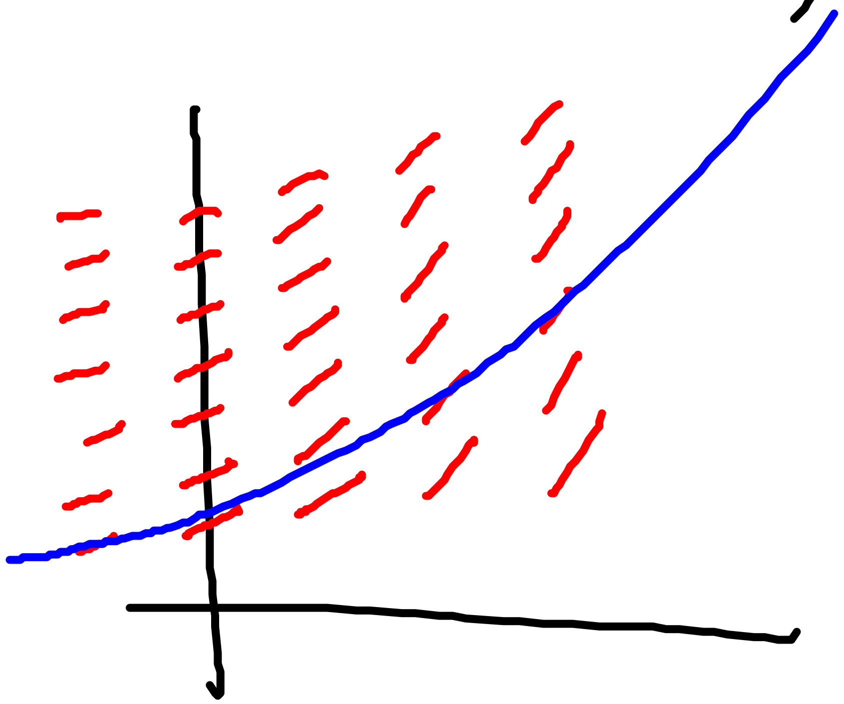


Anfangswertproblem:

Finde eine spezielle Lösung mit $f(t_0) = x_0$

<u>Bsp</u> Wachstum: der Zuwachs ist proportional zur vorhandenen Menge

$$f'(t) = a \cdot f(t)$$



Ansatz: $f(t) = c \cdot e^{bt}$

$f'(t) = c \cdot b\, e^{bt}$

$\Rightarrow b = a$

Lösungen: $f(t) = d \cdot e^{at}$

Autonome DGL weil nicht von t abhängig
$g(t,x) = a \cdot x$

Mehrere Funktionen und entsprechend viele Gleichungen

$\Rightarrow$ Differentialgleichungssystem

gesucht: $f_1(t), f_2(t) \ldots\ldots f_n(t)$

$$f_1'(t) = g_1(t, f_1(t), \ldots\ldots f_n(t))$$
$$f_2'(t) = g_2(t, f_1(t) \ldots\ldots f_n(t))$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$f_n'(t) = g_n(t, f_1(t), \ldots, f_n(t))$$

Autonom wenn die g_i nicht von t abhängen

2. Bsp: Wachstum bei abhängigen Populationen

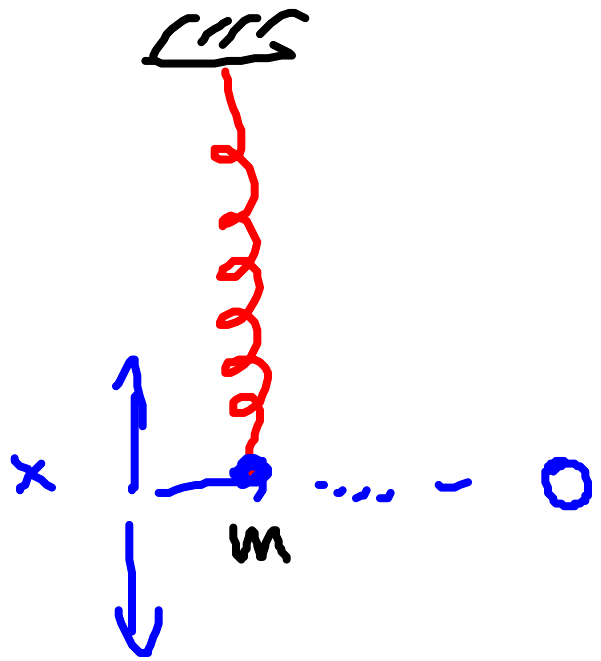
Löwen $L(t)$ Mäuse $M(t)$

$$L'(t) = f_1 L(t) - kill_1 M(t)$$

$$M'(t) = f_2 M(t) - kill_2 L(t)$$

Lineares, autonomes Differentialgleichungssystem

Schwingungen bei Federpendel



Federkonstante

Kraft $F = -f \cdot x$

Kraftgesetz $F = m \cdot a$

$a = v'$ Beschleunigung

$v = x'$ Geschwindigkeit

$$x''(t) = -\frac{f}{m}\, x(t)$$ ← Diff.glg. zweiter Ordnung

$\Downarrow$

$$\left.\begin{aligned} v'(t) &= -\frac{f}{m}\, x(t) \\ x'(t) &= v(t) \end{aligned}\right\}$$ lineares Diff.glg. system.

Lineares Autonomes System 1. ter Ordnung

$$f_1'(t) = a_{11} f_1(t) + a_{21} f_2(t) + \dots + a_{n1} f_n(t)$$

$$\vdots$$

$$f_n'(t) = a_{1n} f_1(t) + a_{2n} f_2(t) + \dots + a_{nn} f_n(t)$$

$$f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} ; \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} ; \quad f'(t) = \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ \vdots \\ f_n'(t) \end{pmatrix}$$

Kurzform: $f'(t) = A \cdot f(t)$

Wir werden sehen: $f(t) = e^{At} \cdot c$

Lösen von autonomen linearen DGLS

$f'(t) = A \cdot f(t)$ (Annahme: es gibt eine Basis aus Eigenvektoren von A)

Raum aller Lösungen: $\mathcal{L}_A = \{ \varphi(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \mid \varphi'(t) = A \cdot \varphi(t) \}$

Fakt: $\mathcal{L}_A$ ist Vektorraum mit Dimension n
(Zeige Linearkombinationen von Lösungen sind Lösungen)

Gesucht: Basis von $\mathcal{L}_A$. Basis: $(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$

Allg. Lösung: $\begin{pmatrix} | & & | \\ \varphi_1(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ | & & | \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = f(t)$

$$f'(t) = A \cdot f(t)$$

Sei λ ein Eigenwert von A mit $Av = \lambda v$

Beh: $f(t) = e^{\lambda t} \cdot v$ ist eine Lösung

Bew: $f'(t) = \lambda e^{\lambda t} \cdot v$

$$A \cdot f(t) = A \cdot (e^{\lambda t} \cdot v) = e^{\lambda t} \cdot (A \cdot v) = \lambda \cdot e^{\lambda t} \cdot v$$

Gibt es eine Basis $(v_1, \ldots v_n)$ aus Eigenvektoren von A

so ist eine Lösungsbasis:

$$\varphi_i(t) = e^{\lambda_i t} \cdot v_i$$

Allgemeiner: e^A für Matrix A

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \dots$$

$$e^A = E + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \frac{1}{24}A^4 + \dots$$

Für $A = SDS^{-1}$ ergibt sich:

$$e^A = e^{SDS^{-1}} = SES^{-1} + SDS^{-1} + \frac{1}{2}SD^2S^{-1} + \frac{1}{6}SD^3S^{-1} + \dots$$

$$= S e^D S^{-1}$$

$$\boxed{e^{\begin{pmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & \ddots \; d_{nn} \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{d_{11}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{d_{nn}} \end{pmatrix}}$$

Behauptung! Lösungsraum $\mathcal{L}_A = \left\{ e^{At}\cdot c \;\middle|\; c\in\mathbb{R}^n \right\}$

<u>Bew</u>

$$e^{At}\cdot c = S\cdot e^{Dt}\cdot \underbrace{S^{-1}\cdot c}_{c'}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}}_{S} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}}_{e^{Dt}} \cdot \begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} | & & | \\ e^{\lambda_1 t} v_1 & \dots\dots & e^{\lambda_n t} v_n \\ | & & | \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix}$$

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (Ungedampfte Schwingung)

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}t^2\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}t^3\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{24}t^4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \dots$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

wg. Potenzreihen von sin and cos

Alternativ über Eigenwerte

$$p_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = i,\ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix};\ \lambda_2 = -i,\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix},\ S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix},\ S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}}_{S} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}}_{e^{Dt}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}}_{S^{-1}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{it} & -ie^{it} \\ e^{-it} & ie^{-it} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{it} + e^{-it} & -ie^{it} + ie^{-it} \\ ie^{it} - ie^{-it} & e^{it} + e^{-it} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$