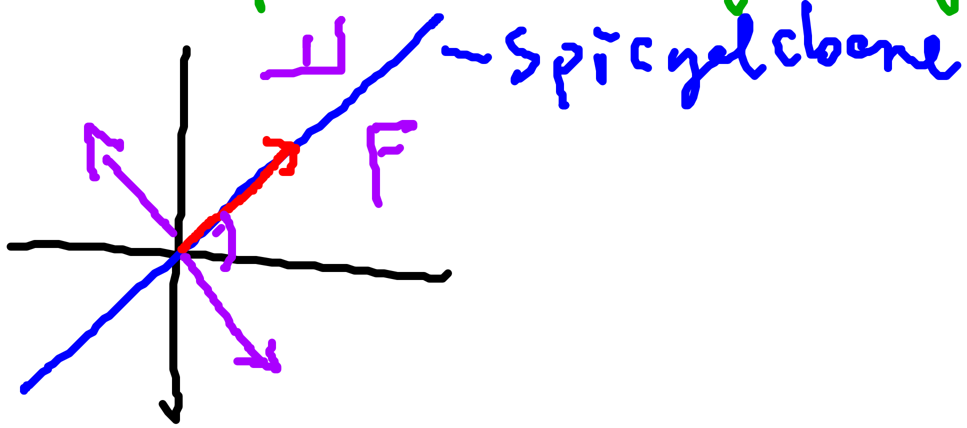
Eigenwerte / Eigenvektoren

Def: Sei A eine quadratische ($n \times n$) Matrix über K.
$\lambda \in K$ heißt **Eigenwert** falls es ein $v \in K^n$ gibt mit $v \neq 0$ und $A \cdot v = \lambda v$. Der Vektor v heißt **Eigenvektor** zum Eigenwert λ.

Ein Eigenvektor wird durch A auf das das λ-fache seiner selbst abgebildet.

Beispiel: Spiegelung:



Eigenwert 1: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Eigenwert -1: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Berechnung von Eigenwerten:

Durch charakteristisches Polynom: $p_A(\lambda) = \det(A-\lambda E)$

Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\{\lambda \mid p_A(\lambda)=0\}$

λ aus $\overline{K}$ der Alg. Abschluss von K.

Bsp $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{C}$

Eigenraum zu Eigenwert λ:

$$\mathrm{Kern}(A-\lambda E) =: ER_\lambda$$

Alle Eigenvektoren zu λ liegen in $ER_\lambda - \{0\}$

Bew $A\cdot v = \lambda\cdot v \Leftrightarrow A\cdot v - \lambda v = 0 = (A-\lambda E)v = 0$

Eigenwerte und „Matrizenmessgrößen"

$$\begin{cases} \det(A) & \Leftarrow \text{Determinante} \\ \operatorname{spur}(A) := \sum a_{ii} & \Leftarrow \text{Summe der Diagonalelemente} \\ p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) & \Leftarrow \text{Charakteristisches Polynom} \end{cases}$$

sind alle allein durch die Eigenwerte (mit Vielfachheit) bestimmt.

Sei A eine $n \times n$ Matrix mit

$$p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \cdot (\lambda_2 - \lambda) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - \lambda) \quad \Leftarrow \text{Linearfaktorzerlegung von } p_A(\lambda)$$

Dann gilt:

(i) $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

(ii) $\operatorname{spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

Bew: $\det(A-\lambda E) = (\lambda_1-\lambda)\cdot(\lambda_2-\lambda)\cdot\ldots\cdot(\lambda_n-\lambda)$

$$= (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)\,\lambda^{n-1} + \ldots\ldots$$
$$+ (\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\ldots\cdot\lambda_n)$$

(i) Zeige $\det(A) = \prod_{i=1}^{n}\lambda_i$: folgt fuer $\lambda = 0$

$$\det(A) = \det(A - 0E) = \lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\ldots\cdot\lambda_n$$

(ii) Zeige $\mathrm{Spur}(A) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i$

$$A-\lambda E = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & & & * \\ & a_{22}-\lambda & & \\ & & \ddots & \\ * & & & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

Einzigen Summanden in $\det(A-\lambda E)$ die zu λ^{n-1} beitragen liegen auf der Hauptdiagonale

Vorfaktor fuer λ^{n-1} ist
$(-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn})$

Ähnliche Matrizen:

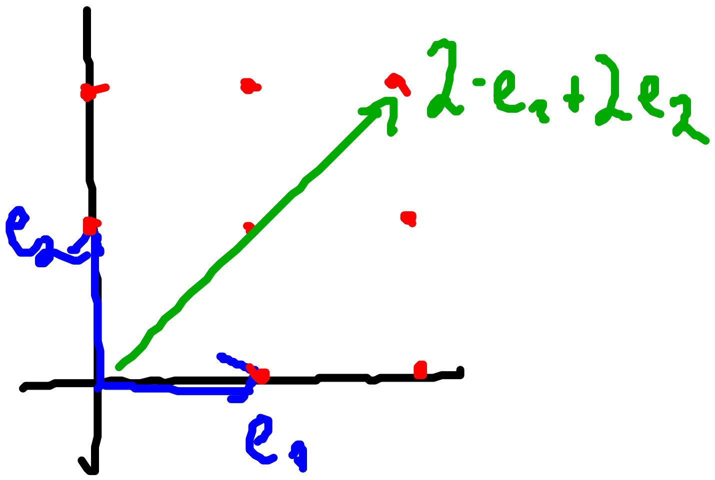
Def Zwei quadratische Matrizen $A \in K^{n \cdot n}$ und $B \in K^{n \cdot n}$ heißen **ähnlich** falls eine invertierbare Matrix S existiert mit

$$A = SBS^{-1}$$

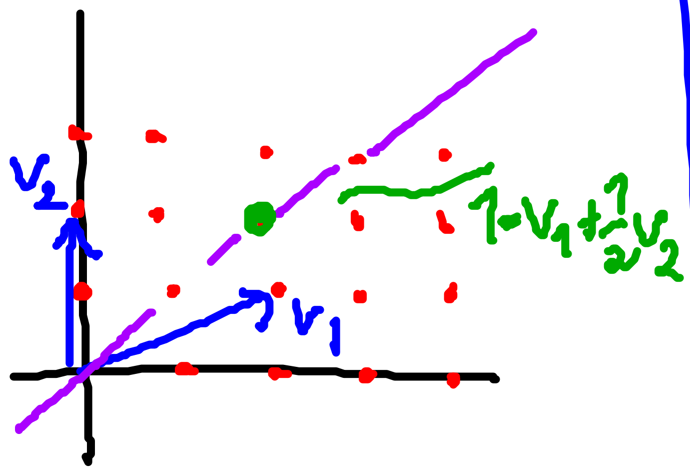
A und B beschreiben die gleiche Abbildung in verschiedenen Koordinatensystemen.

Bsp $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

1. Basis $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$



2. Basis $v_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$



$\longleftarrow$

$\begin{pmatrix}2&0\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ $=S^{-1}$

$\longrightarrow$

$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ $=S$

$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

Sei $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

bzgl Basis 1

(Spiegelung an der Winkelhalbierenden)

$S\cdot A\; S^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\1&2\end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&1\\\frac{3}{4}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

Was bleibt unter Ähnlichkeitstransformationen gleich

- Determinante: $\det(A) = \det(S \cdot B \cdot S^{-1})$
  $= \det(S) \cdot \det(B) \cdot \det(S^{-1})$
  $= \det(B)$

- Eigenwerte: Sei λ EW von B mit $Bv = \lambda v$, $v \neq 0$
  und $A = S B S^{-1}$

  Sei $v' = Sv$

$$\boxed{A \cdot v'} = S B S^{-1} v' = S B \underbrace{S^{-1} S}_{E} v$$
$$= S B v = S(\lambda v)$$
$$= \lambda \cdot (S \cdot v) = \boxed{\lambda \cdot v'}$$

Ähnliche Matrizen haben gleiches charakt. Poly.

$$p_A(\lambda) = p_B(\lambda).$$

Bew

$$\underbrace{\det(A-\lambda E)}_{p_A(\lambda)} = \det(SBS^{-1}-\lambda E)$$

$$= \det(SBS^{-1}-\lambda\cdot(SES^{-1}))$$

$$= \det(S\cdot(B-\lambda E)\cdot S^{-1})$$

$$= \det(S)\cdot\det(B-\lambda E)\cdot\det(S^{-1})$$

$$= \underbrace{\det(B-\lambda E)}_{p_B(\lambda)}$$

Bem: alles Vorherige ist Sonderfall hiervon

Diagonalisierbarkeit:

Eine $n \times n$ Matrix A heißt diagonalisierbar falls K^n eine Basis aus Eigenvektoren von A besitzt.

Sei $v_1 \ldots\ldots v_n$ eine Basis aus Eigenvektoren von A mit Eigenwerten $\lambda_1 \ldots\ldots \lambda_n$

Sei $S^{-1} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \ldots\ldots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$

$$S \cdot A \cdot S^{-1} = S \cdot A \cdot \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \ldots\ldots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} | & & | \\ Av_1 & \ldots & Av_n \\ | & & | \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} | & & | \\ \lambda_1 v_1 & \ldots\ldots & \lambda_n v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Anwendung berechne A^k (sehr großes k)

Angenommen A ist Diagonalisierbar:

$A = S D S^{-1}$, D ist Diagonalmatrix

$A^k = (S D S^{-1})^k = \underbrace{(S \cdot D \cdot S^{-1})(S \cdot D \cdot S^{-1}) \ldots\ldots (S \cdot D \cdot S^{-1})}_{k\text{-mal}}$

$= S \cdot D \cdot (S^{-1} \cdot S) \cdot D \cdot (S^{-1} \cdot S) \ldots\ldots (S^{-1} \cdot S) \cdot D \cdot S^{-1}$

$= S \cdot \underbrace{D \cdot D \ldots\ldots D}_{k\text{ mal}} \cdot S^{-1}$

$= S \cdot D^k \cdot S^{-1}$

$$\boxed{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}}$$