Determinanten: $\det(A)$ für $n \times n$ Matrix A
ist ein Polynom $\det : K^{n \cdot n} \to K$

mit (i) normiert $\det(E_n) = 1$

(ii) multilinear in Spalten

(iii) alternierend Vertausch von zwei Spalten ändert Vorz

$\Rightarrow$ Existenz und Eindeutigkeit

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sign}(\pi) \prod a_{\pi(i),i}$$

Bsp: $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to -\begin{pmatrix} \cdot & \bullet & \cdot & \cdot \\ \bullet & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \bullet & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \bullet \end{pmatrix}$

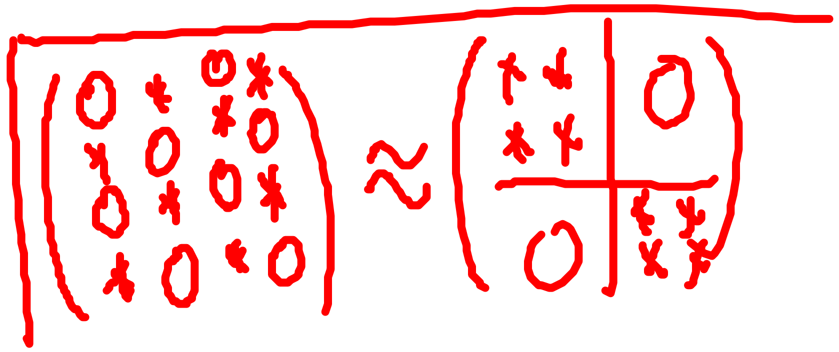
Berechnungsformeln für Determinanten:

① Summiere $n!$ Produktterme (hoffnungslos langsam wenn n groß)

② Spezialfälle: obere Dreiecksmatrix

(i) $\det \begin{pmatrix} d_1 & & & * \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{pmatrix} = d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdot \ldots \cdot d_n$

(ii) $\det \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(B)$



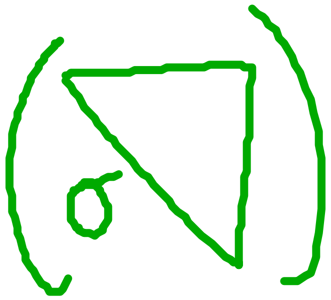
③ Determinante mittels Gauss Algor.

Ziel: Berechne $\det(A)$

Verfahren: Bringe A auf Dreiecksform durch Operationen der folgenden Art

(i) Addiere das Vielfache einer Zeile zu einer Anderen ← das ändert det nicht!

(ii) Zeilen oder Spaltentausch ← kehrt das Vorz. um

→ Berechne det 

Bsp

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ \boxed{1} & 1 & 0 \\ \boxed{2} & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$z_2 \leftarrow z_2 - \frac{1}{2} z_1$

$z_3 \leftarrow z_3 - z_1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \boxed{2} & 3 \end{pmatrix}$$

$z_3 \leftarrow z_3 - 4 z_2$

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 1$$

Probe

$4 - 3 - 2 + 2$

$= \underline{\underline{1}}$

(4) Spaltenentwicklung

Bsp $\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = a\cdot(ei - fh) + d\cdot(hc - bi) + g\cdot(bf - ce)$

$$= a\cdot\det\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - d\cdot\det\begin{pmatrix} b & c \\ h & i \end{pmatrix} + g\cdot\det\begin{pmatrix} b & c \\ e & f \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & \cdot & \cdot \\ \cdot & e & f \\ \cdot & h & i \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cdot & b & c \\ d & \cdot & \cdot \\ \cdot & h & i \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cdot & b & c \\ \cdot & e & f \\ g & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Allgemein

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & & a_{ij} & \\ & & & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

die Matrix die aus A durch Streichen der i ten Zeile und j ten Spalte entsteht

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} \left(a_{i1} \cdot (-1)^{i+1} \cdot \det(A_{i1}) \right)$$

Entwicklung nach der 1 ten Spalte

Allgemein $$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} (-1)^{(i+j)} \cdot \det(A_{ij})$$

Entwicklung nach der j ten Spalte

Analog: Zeilenentwicklung

Determinanten und lineare Gleichungssysteme:

Bsp $n=3$ $\quad a_1, a_2, a_3 \in K^3$, $b \in K^3$

Löse $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = b$

Betrachte nur Fall $\det\begin{pmatrix} | & | & | \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} \neq 0$

Betrachte $\det(\underset{\text{fest}}{a_1}, \underset{\text{fest}}{a_2}, \underset{\text{variabel}}{y})$ als Fkt $K^3 \to K$

$$\det(a_1, a_2, \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3) = \det(a_1, a_2, b)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\det(a_1, a_2, a_1)}_{=0} \cdot \lambda_1 + \underbrace{\det(a_1, a_2, a_2)}_{=0} \cdot \lambda_2 + \det(a_1, a_2, a_3) \cdot \lambda_3 = \det(a_1, a_2, b)$$

$$\Rightarrow \lambda_3 = \frac{\det(a_1\, a_2\, b)}{\det(a_1\, a_2\, a_3)}$$

$$\lambda_1 = \frac{\det(b, a_2, a_3)}{\det(a_1, a_2, a_3)} \qquad \lambda_2 = \frac{\det(a_1, b, a_3)}{\det(a_1, a_2, a_3)}$$

Cramer'sche Regel

Allgemein im K^n

Löse $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots\ldots \lambda_n a_n = b$

b an Stelle von a_i

$$\lambda_i = \frac{\det(a_1 \ldots a_{i-1}\, b\, a_{i+1} \ldots a_n)}{\det(a_1 \ldots\ldots\ldots a_n)}$$

Determinanten haben viele wichtige Anwendungen

- Kriterium für Invertierbarkeit
- Volumenberechnung
- Orientierungen von Objekten
  - Hidden Lines
  - Collisionserkennung
  - Optimierung
- Eigenvektoren (Definition) und Berechnung

Die haben wieder viele Anwendungen

Vol

$\sum \det(a,b,c)$

(a,b,c) in Triangulierung

Eigenvektoren:

Gegeben: Quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \cdot n}$

Def: gilt für einen Vektor $\boxed{v \neq \vec{0}}$ und eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ die Gleichung $\boxed{A \cdot v = \lambda \cdot v}$

so heißt v ein Eigenvektor zum Eigenwert λ.

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}; \lambda_1 = -1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}; \lambda_2 = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \lambda_3 = 1$$

Berechnungstrick: charakteristisches Polynom

Die Nullstellen von $\det(A-\lambda E)$ sind die Eigenwerte

Bsp

$$\det\left(\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix}1-\lambda & -2 & 0\\ -2 & -\lambda & 1\\ 0 & -2 & 1-\lambda\end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\cdot(-\lambda)\cdot(1-\lambda) + 2(1-\lambda) - 4(1-\lambda)$$

$$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2$$

$\lambda_1 = 1: \; -1+2+1-2=0$

$\lambda_2 = -1: \; 1+2-1-2=0$

$\lambda_3 = 2: \; -8+8+2-2=0$

Bsp. Eigenvektor zu $\lambda=2$

$$A-2\cdot E = \begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ -2 & -2 & 1\\ 0 & -2 & -1\end{pmatrix}$$

Suche v mit $(A-2E)\cdot v = 0$

Satz $\det(A-\lambda E)=0 \iff \lambda$ ist Eigenwert

Bew $\det(A-\lambda E)=0$

$\iff A-\lambda E$ ist nicht invertierbar

$\iff (A-\lambda E)v=0$ hat nicht triviale Lösung $v\neq 0$

$\iff \exists\, v\neq 0$ mit $(A-\lambda E)v=0$

$\iff$ —— " —— $Av-\lambda \underbrace{Ev}_{=v}=0$

$\iff$ —— " —— $Av-\lambda v=0$

$\iff$ —— " —— $Av=\lambda v$

$\iff \lambda$ ist Eigenwert und v zugehöriger Eigenvektor