Letztes Mal: Rechnen mit Matrizen

- Addition (zweier $n \times m$ Matrizen)
- Multiplikation (einer $m \times n$ mit einer $n \times k$ Matrix)
- Transposition (einer beliebigen Matrix)
- Invertieren (einer $n \times n$ Matrix)

$$A \cdot A^{-1} = E_n$$

$\to$ Berechnung über Gauss alg.

$\to$ Berechnung über

$$\underbrace{S_k \cdot \ldots \cdot S_3 \cdot S_2 \cdot S_1}_{A^{-1}} \cdot A = E_n$$

- Anwendung der Inversen: zB LGS lösen

$Ax = b$, A invertierbar $\Rightarrow x = A^{-1} b$

Determinanten

Sei A eine $n\times n$ Matrix

Wir können A als ein Element des $K^{n\cdot n}$ auffassen.

Die Determinante ist ein ganz bestimmtes Polynom $\det: K^{n\cdot n}\to K$ in den Einträgen der Matrix.

Alternativ

$\det: (K^n)^n \to K$

bildet n n-dimensionale Vektoren auf K ab (die Spalten der Matrix)

Bsp $n=2$

$$\det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = a\cdot d - bc$$

Bsp $n=3$

$$\det\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = aei + dhc + gbf - ahf - dbi - gec$$

Im Allgemeinen hat die Determinante einer $n\times n$ Matrix $n!$ Terme vom Grad n.

Abk. $\det\begin{pmatrix} | & & | \\ a_1 & \dots & a_n \\ | & & | \end{pmatrix} = \det(a_1, \dots, a_n)$, $a_1 \dots a_n \in K^n$

Die Determinante wird durch drei Eigenschaften charakterisiert:

(i) $\det(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$ (normiert)

(ii) $\det(\dots\dots)$ ist linear in jeder Matrixspalte.

- $\det(a_1, \dots\dots, a_i + a_i', \dots a_n) = \det(a_1 \dots a_i \dots a_n) + \det(a_1 \dots a_i' \dots a_n)$
- $\det(a_1 \dots, \lambda a_i, \dots a_n) = \lambda \det(a_1 \dots a_i \dots a_n)$

(multilinear)

(iii) $\det(\dots)$ antikommutativ

- $\det(a_1 \dots a_i \dots a_j \dots a_n) = -\det(a_1 \dots a_j \dots a_i \dots a_n)$

(antikommutativ)

Einfache Folgerungen:

(i) Sei $a_i = a_j$ für $i \neq j$ (Zwei Spalten sind identisch)

$$\det(a_1 \ldots \underbrace{a_i \ldots a_j}_{=} \ldots a_n) = 0$$

<u>Bew</u>

$$\det(a_1 \ldots a_i \ldots a_j \ldots a_n) \overset{\text{wg antikommutativ}}{=} -\det(a_1 \ldots a_j \ldots a_i \ldots a_n)$$

$$= -\det(a_1 \ldots a_i \ldots a_j \ldots a_n)$$

$$\Rightarrow \det(a_1, \ldots a_n) = 0$$

(ii) Ist a_n Linearkombination von $a_1, \ldots, a_{n-1}$
$\Rightarrow \det(a_1, \ldots, a_n) = 0$

<u>Bew</u> Sei $a_n = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_{n-1} a_{n-1}$

$$\det(a_1, \ldots, a_n) = \det(a_1, \ldots, a_{n-1}, \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_{n-1} a_{n-1})$$
$$= \lambda_1 \det(\underline{a_1}, \ldots, a_{n-1}, \underline{a_1})$$
$$+ \lambda_2 \det(a_1, \underline{a_2}, \ldots, a_{n-1}, \underline{a_2})$$
$$\vdots$$
$$+ \lambda_{n-1} \det(a_1, \ldots, \underline{a_{n-1}}, \underline{a_{n-1}})$$

$$= 0 + 0 + \ldots + 0 = 0$$

Matrix A ist invertierbar $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$

Die drei Eigenschaften bestimmen die Det. eindeutig

$\boxed{\text{Bsp } n=2}$

$$\det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \det\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right)$$

die einzigen Summanden die „überleben" sind die, in denen alle e_i auftreten

$$= \det(ae_1 + be_2, ce_1 + de_2)$$

$$= \det(ae_1, ce_1 + de_2) + \det(be_2, ce_1 + de_2)$$

$$= \det(ae_1, ce_1) + \det(ae_1, de_2) + \det(be_2, ce_1) + \det(be_2, de_2)$$

$$= a \cdot c \cdot \underbrace{\det(e_1, e_1)}_{=0} + a \cdot d \cdot \det(e_1, e_2) + b \cdot c \cdot \det(e_2, e_1) + b \cdot d \cdot \underbrace{\det(e_2, e_2)}_{=0}$$

$$= a \cdot d \cdot \underbrace{\det(e_1, e_2)}_{=1} + b \cdot c \cdot \underbrace{\det(e_2, e_1)}_{=-1}$$

$$= ad - bc$$

Allgemeine Struktur der Determinantenberechnung:

- Summanden sind vorzeichenbehaftete Produkte von n Matrixeinträgen, einer aus jeder Spalte.
- Die Einträge müssen so gewählt werden, dass für jeden Summanden genau einer aus jeder Zeile kommt.

$$\begin{pmatrix} \cdot & a & \cdot & \cdot \\ b & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & c & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & d \end{pmatrix}$$

$\pm abcd$ ein Summand der Det.

2

Vorzeichen ist $\mathrm{sign}(\pi)$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in S_4$$

$\boxed{\text{Det einer } n \times n \text{ Matrix hat genau } n! \text{ Summanden.}}$

Allgemeine Formel für Determinante

A sei Matrix $\begin{pmatrix} | & & | \\ a_1 & \dots & a_n \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & a_{ji} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$

$$\det(A) = \sum_{\underbrace{\pi \in S_n}_{\text{alle Permutationen von } n \text{ Objekten}}} \left(\operatorname{sign}(\pi) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{\pi(i),i} \right)$$

$$\det\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = +\begin{pmatrix} a & & \\ & e & \\ & & i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & & \\ & & h \\ & f & \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & d & \\ b & & \\ & & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & & g \\ b & & \\ & f & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & d & \\ & & h \\ c & & \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & & g \\ & e & \\ c & & \end{pmatrix}$$

$$aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg$$

Merkregel für 3x3 Matrizen:

$$\begin{array}{ccccc} a & d & g & a & d \\ b & e & h & b & e \\ c & f & i & c & f \\ - & - & - & + & + \;\; + \end{array}$$

$$\det(A) = aei + dhc + gbf - gec - ahf - dbi$$

Achtung: gilt nur für 3x3 Matrizen

Anz der Summanden

$n=1 \Rightarrow 1$

$n=2 \Rightarrow 2$

$n=3 \Rightarrow 6$

$n=4 \Rightarrow 24$

$n=5 \Rightarrow 120$

$n=6 \Rightarrow 720$

$n=7 \Rightarrow 5040$

Weitere Rechenregeln für Determinanten:

(iii) $\det(A) = \det(A^T)$

Bew: in der Summenformel treten Zeilen und Spalten gleichberechtigt auf

(iv) det ist linear in jeder Zeile
det ist alternierend bzgl. Zeilenvertauschung

Bew: Direkte Konsequenz aus (iii)

(v) Zeilenumformungen und det

I Vertauschen zweier Zeilen ändert das Vorz.

II Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen ändert den Wert von det nicht.

$$\underbrace{\det\begin{pmatrix} \vdots \\ - z_i - \\ \vdots \\ - z_j + \lambda z_i - \\ \vdots \end{pmatrix}}_{} = \underbrace{\det\begin{pmatrix} \vdots \\ - z_i - \\ \vdots \\ - z_j - \\ \vdots \end{pmatrix}}_{} + \lambda \cdot \underbrace{\det\begin{pmatrix} \vdots \\ - z_i - \\ \vdots \\ - z_i - \\ \vdots \end{pmatrix}}_{=0}$$

$=$

III Multiplizieren von einer Zeile mit $\lambda \neq 0$ gibt

$$\det\begin{pmatrix} \vdots \\ - \lambda z_i - \\ \vdots \end{pmatrix} = \lambda \cdot \det\begin{pmatrix} \vdots \\ - z_i - \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \det(A)$

(vi) $\operatorname{rang}(A) < n \iff \det(A) = 0$

Bew: $\operatorname{rang}(A) < n \iff$ Spalten sind lin. abh. $\iff \det(A) = 0$

(vii) Produkt-Satz: Seien A, B $n \times n$ Matrizen, dann gilt: $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

Bew

Fall 1: $\operatorname{rang}(B) < n \Rightarrow \operatorname{rang}(A \cdot B) < n$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\det(B) = 0 \qquad\qquad \det(A \cdot B) = 0$$

Fall 2: $\operatorname{rang}(B) = n \Rightarrow \det(B) \neq 0$

Betrachte $\delta(A) = \dfrac{\det(A \cdot B)}{\det(B)}$

Zeige $\delta(A) = \det(A)$

$\delta(E_n) = \dfrac{\det(E_n \cdot B)}{\det(B)} = 1$

$\delta(A)$ alternierend

$\delta(B)$ multilinear

$\Rightarrow \delta(A) = \det(A)$

$$\Rightarrow \det(A) = \frac{\det(A \cdot B)}{\det(B)}$$

$$\Rightarrow \det(B) \cdot \det(A) = \det(A \cdot B)$$

Drei Tatsachen:

- $\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$
- $\det(E_n) = 1$
- $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$

Invertierbaren $n\times n$ Matrizen

$\det : GL(n,K) \to K - \{0\}$

ist ein Gruppenhomomorphismus

$GL(n,K)$ die Gruppe aller invertierbaren $n\times n$ Matrizen über dem Körper K. Mit Matrixmultiplikation als Gruppenverknüpfung