Vor-Letztes Mal: Lösen von Gleichungssystemen

Gegeben A, b gesucht ist x mit $\boxed{Ax=b}$

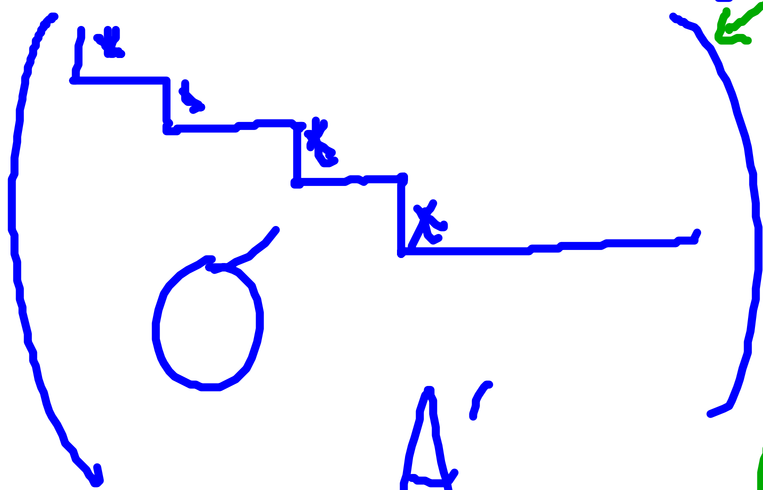
Strategie: bringe A durch elementare Zeilenumformungen

(i) Vertausche zwei Zeilen

(ii) skaliere eine Zeile mit $\lambda \neq 0$

(iii) addiere Vielfaches einer Zeile zu einer anderen

auf Zeilenstufenform



A'

jede Zeile mehr führende Nullen als die vorhergehende (oder sie ist ganz 0)

Wende die gleichen Umformungen auf b an, um b' zu erhalten

Löse: $A'x=b'$ ⇐ das geht durch Rückwärts einsetzen

Elementare Zeilenumformungen erhalten den (Zeilen-)Rang einer Matrix.

$\Rightarrow$ rang(A) = # nicht Nullzeilen in Zeilenstufenform

Wichtiger Spezialfall: A ist $n \times n$ Matrix mit rang$(A) = n$

$\Rightarrow$ A kann durch Zeilenumformungen auf obere Dreiecksform gebracht werden

$* \neq 0$

Durch weitere Zeilenumformungen läßt sich die Matrix auf die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

bringen.

$\leftarrow$ $n \times n$ Einheitsmatrix E_n

Zeilenumformungen (i) ... (iii) entsprechen geeigneten Linksmultiplikationen mit Matrizen

Schrittweises Umformen $\Leftrightarrow$ Schrittweises Multiplizieren mit Matrizen von links.

$$Q \cdot A = \underbrace{\overbrace{S_k \cdot \ldots \cdot S_2 \cdot S_1}^{\text{Zeilenoperationen}}}_{= Q \text{ codiert alle Umformungen.}} \cdot A = \begin{pmatrix} \boxed{*} & * & & \\ & \boxed{*} & * & \\ & & \boxed{*} & * \\ 0 & & & \boxed{*} \end{pmatrix}$$

Spezialfall: A ist $n \times n$ Matrix mit $\operatorname{rang}(A) = n$

$$\underbrace{S_\ell \cdot \ldots \cdot S_2 \cdot S_1}_{= A^{-1} \text{ (links)inverses von } A} A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = E_n$$

Bem Sei A $n \times n$ Matrix mit $\text{rang}(A) = n$

(i) A ist (links)-invertierbar

(ii) A^{-1} hat ebenso $\text{rang}(A^{-1}) = n$

(iii) A^{-1} ist (links)invertierbar

(iv) aus (i) und (iii) folgt

A^{-1} ist auch rechtsinverses von A

↳ Beweis siehe 4. Vorlesung

(v) A^{-1} heißt die Inverse zu A

Sei A $n \times n$ Matrix mit $\text{rang}(A) = n$

Inversenberechnung:

gesucht A^{-1} mit $A \cdot A^{-1} = E$

$$\begin{pmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | & & | \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \dots & \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Simultan Lösen: $Ax_1 = e_1$; $Ax_2 = e_2, \dots,$ $Ax_n = e_n$

Frage: wie macht man das möglichst ökonomisch

Invertiere:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -15 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$z_2 \leftarrow z_2 - 2z_1$

$z_3 \leftarrow z_3 - z_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$z_3 \leftarrow z_3 + 2z_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$z_1 \leftarrow z_1 + 3z_3$

$z_2 \leftarrow z_2 - 3z_3$

$z_3 \leftarrow -z_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$z_1 \leftarrow z_1 - 2z_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\boxed{\begin{matrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{matrix}} = A^{-1}$$

Lösen von LGS durch Inverse:

Sei A eine invertierbare Matrix

Aufgabe: Löse $A \cdot x = b$

Lösung: $x = A^{-1} \cdot b$

Im Fall A fest und b variabel ist das gutes „Preprocessing"

$$Ax = b \Rightarrow \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{E_n} x = A^{-1} \cdot b \Rightarrow E_n x = A^{-1} \cdot b \Rightarrow x = A^{-1} b$$

5.3 Rechnen mit Matrizen

A, B seien $m \times n$ Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

I

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

$\lambda \in K$

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

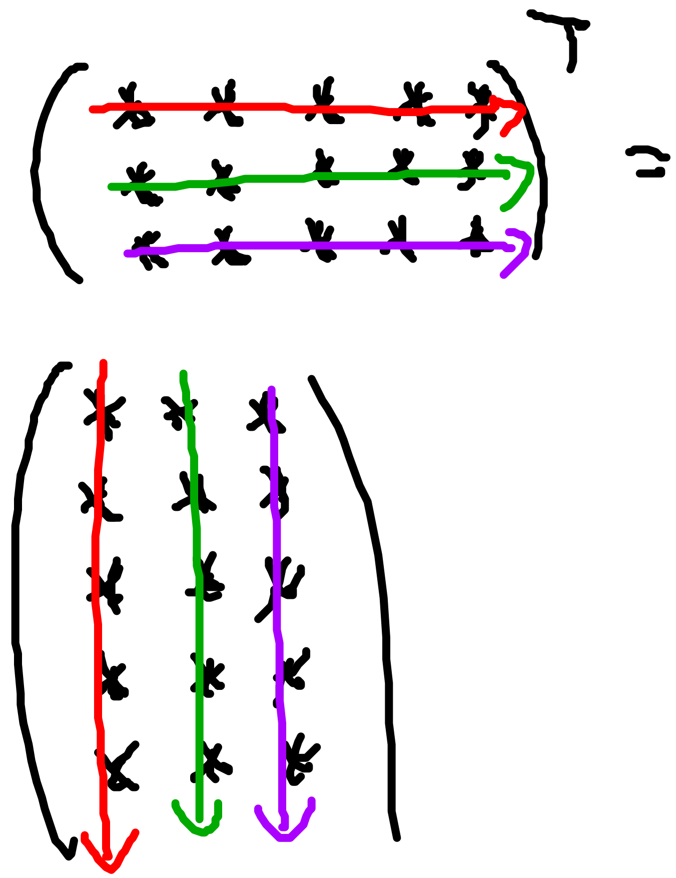
Menge der $n \times m$ Matrizen über K bildet einen Vektorraum der Dimension $n \cdot m$.

II Transposition

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ $m \times n$ Matrix

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ $n \times m$ Matrix

Vertauschen von Zeilen und Spalten



II Matrizenmultiplikation

$$\begin{array}{cc} & \overbrace{\hphantom{aaaaaaaaaa}}^{n} \\ m\left\{\right. & \begin{pmatrix} \text{———} & a_1 & \text{———} \\ & \vdots & \\ \text{———} & a_m & \text{———} \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{cc} & \overbrace{\hphantom{aaaaaaa}}^{k} \\ n\left\{\right. & \begin{pmatrix} | & & | \\ c_1 & \cdots & c_k \\ | & & | \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} \overbrace{\hphantom{aaaaaaaaaa}}^{k} & \\ \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & d_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} & \left.\right\} m \end{array}$$

$$d_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} \cdot c_{jl}$$

(Siehe 4 Vorlesungen früher)

IV Einheitsmatrix

$$E_n = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} n \\ n \end{array}$$

Diese Abbildung entspricht der Identität

$K^n \to K^n$

$x \to x$

Bsp

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

V Inverse:

Seien A, A' $n \times n$ Matrizen

gilt $A \cdot A' = E_n$ so heißt A' invers zu A.

A nennt man Invertierbar wenn eine Inverse existiert. Man schreibt $A' = A^{-1}$

Rechenregeln für Matrizen

(i) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

(ii) $A \cdot E_n = A$; $E_m \cdot A = A$

(iii) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

(iv) $B + B' = B' + B$

(v) $A \cdot (B + B') = A \cdot B + A \cdot B'$

$(B + B') \cdot C = B \cdot C + B' \cdot C$

A: $m \times n$
B: $n \times k$
C: $k \times r$
B': $n \times k$

Achtung,

Es gilt NICHT allgemein
$A \cdot B = B \cdot A$

Sei $n = m = k$ $\quad A, B$ beide Invertierbar

(vi) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

(vii) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

$$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1}$$
$$= A \cdot E_n \cdot A^{-1}$$
$$= A \cdot A^{-1}$$
$$= E_n$$