Lineare Gleichungssysteme:

Gegeben Matrix A Vektor b

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & n & 1 \end{array} \\ m & \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$A \cdot x = b$$

Gesucht:

$\{x \in K^n \mid A \cdot x = b\}$

$= \{x \in K^n \mid f_A(x) = b\}$

$=: Lös_{A,b}$

$=: Lös_{f_A, b}$

$$\Rightarrow \underbrace{x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n}_{\text{lineare Abbildung}} = b$$

lineare Abbildung

$$f_A : K^n \to K^m$$
$$x \mapsto Ax$$

$$\Rightarrow f_A(x) = b$$

Drei „Denkarten"

- Matrix Vektor Gleichung
- Linearkomb, span
- Lineare Funktionen Bild

Wichtiger Spezialfall: Homogene LGS

$$A \cdot x = \boxed{0}$$

$f_A : K^n \to K^m$ $\quad \text{Lös}_{A,0} = \{ x \in K^n \mid f_A(x) = 0 \}$

$= \text{Kern}(f_A)$

$\Rightarrow \text{Lös}_{A,0}$ ist Vektorraum!

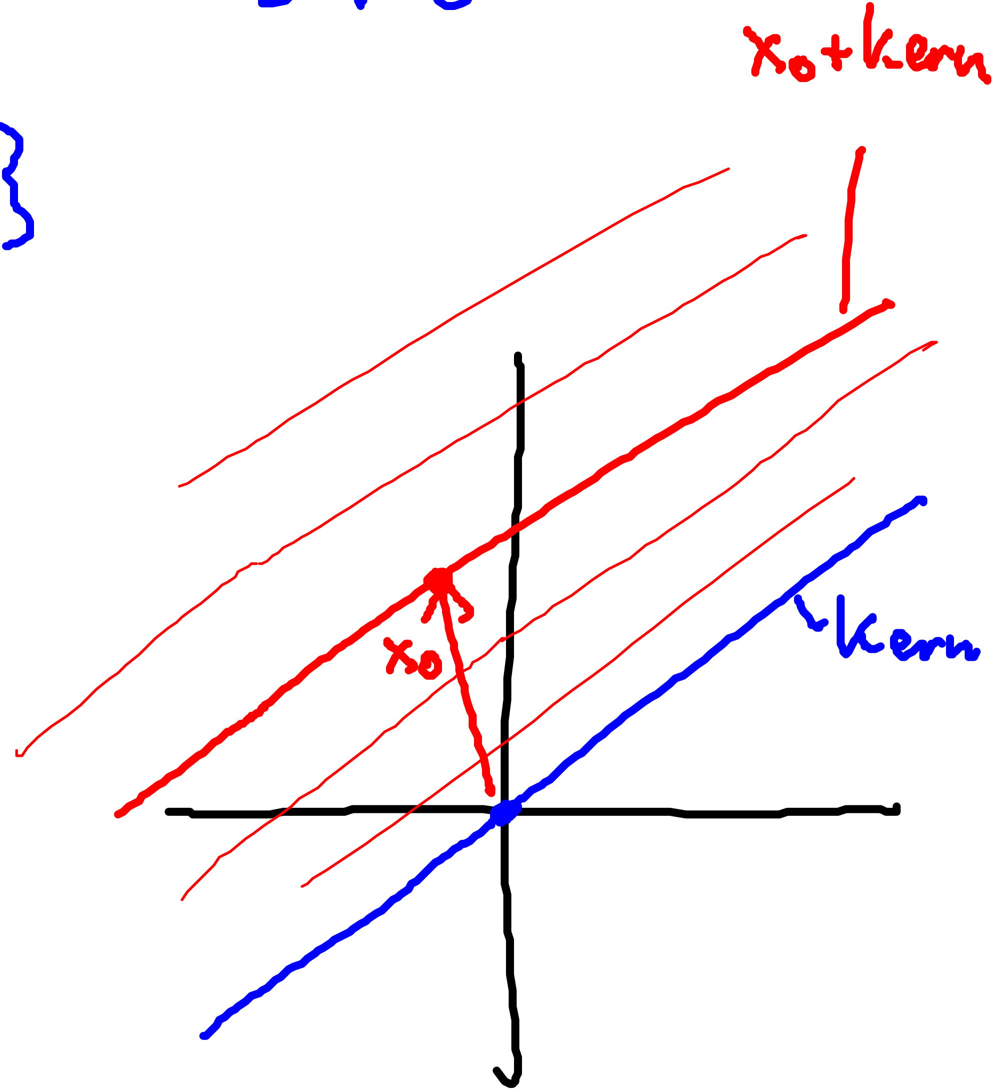
- „Triviale Lösung" $x = 0$ existiert immer.
- Nicht triviale Lösungen existieren genau dann wenn Spalten von A linear abhängig sind!

$$0 = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$$

Man gibt $\text{Lös}_{A,0}$ am besten durch Angabe einer Basis an.

Inhomogenes LGS: $Ax = b \quad b \neq 0$

$\text{Lös}_{A,b} = \{x \in K^n \mid f_A(x) = b\}$



<u>Satz:</u> Die Lösungsmenge $\text{Lös}_{A,b}$ hat die Form $x_0 + \text{Kern}(f_A)$ für ein beliebiges x_0 mit $f_A(x_0) = b$.

Bem. $\text{Lös}_{A,b}$ ist Nebenklasse von $\text{Kern}(f_A) = \text{Lös}_{A,0}$.

Bew

$\text{Lös}_{f,b} \subseteq x_0 + \text{kern}(f)$

Sei $f(x_0) = b$

$x \in \text{lös}_{f,b} \Rightarrow f(x) = b$

$\Rightarrow f(x - x_0) = f(x) - f(x_0) = b - b = 0$

$\Rightarrow x - x_0 \in \text{Kern}(f)$

$\Rightarrow x = x_0 + k$ mit $k \in \text{kern}(f)$

$\text{Lös}_{f,b} \supseteq x_0 + \text{kern}(f)$

Sei $x = x_0 + k$ mit $k \in \text{kern}(f)$

$f(x) = f(x_0 + k) = f(x_0) + f(k)$

$= b + 0 = b$

$\Rightarrow x \in \text{lös}_{f,b}$

<u>Satz</u>

(i) $f_A(x) = b$ nur dann lösbar wenn $b \in \text{Bild}(f_A)$

<u>Bew</u>: klar wg Def von $\text{Bild}(f_A)$

(ii) $f_A(x) = b$ ist eindeutig lösbar wenn $b \in \text{Bild}(f_A)$ und $\dim(\text{Kern}(f_A)) = 0$

Bew: klar wg vorherigem Satz

$$\text{Los}_{f_A, b} = x_0 + \text{Kern}(f_A)$$

Rang einer Matrix

Spaltenrang: $M = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$

$$\text{spaltenrang}(M) = \dim(\text{span}(v_1 \ldots v_n))$$

(= Anzahl der Vektoren in einer maximalen lin. unabh. Menge von Spalten)

Zeilenrang: $M = \begin{pmatrix} — & w_1 & — \\ & \vdots & \\ — & w_m & — \end{pmatrix}$

$$\text{zeilenrang}(M) = \dim(\text{span}(w_1 \ldots w_m))$$

(= Anzahl der Vektoren in einer maximalen lin. unab. Menge von Zeilen)

Satz Sei M eine $m \times n$ Matrix mit zugehörigen Linearen Abbildung $f_M: K^n \to K^m$ dann gilt:

$$\text{zeilenrang}(M) \overset{(ii)}{=} \text{spaltenrang}(M) \overset{(i)}{=} \dim(\text{Bild}(f_M))$$

Bew (i) Folgt direkt aus Definition von Bild

$$\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$$

$$\Rightarrow \text{span}(v_1, \dots, v_n) = \text{Bild}(f_M)$$

(ii) „trickreich"

Bew Zeilenrang = Spaltenrang (in Höppchen)

1. Beobachtung:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} | & & | \\ a_1 & \cdots & a_r \\ | & & | \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | \\ s \\ | \end{pmatrix}$$

← Linearkombination von Spalten von A

2. Beobachtung:

$$(\lambda_1 \cdots \lambda_r) \underbrace{\begin{pmatrix} — b_1 — \\ \vdots \\ — b_r — \end{pmatrix}}_{B} = (— z —)$$

← Linearkombination der Zeilen von B

3. Beobachtung:

$$\begin{pmatrix} | & & | \\ s_1 & \cdots & s_n \\ | & & | \end{pmatrix} = m\left\{\begin{pmatrix} | & & | \\ a_1 & \cdots & a_r \\ | & & | \end{pmatrix}\right. \overset{n}{\begin{pmatrix} — b_1 — \\ \vdots \\ — b_r — \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} — z_1 — \\ \vdots \\ — z_m — \end{pmatrix}$$

Wg. Beobachtung 1 sind die Spalten lin. Komb. der $a_1 \ldots a_r$

Wg. Beobachtung 2 sind die Zeilen Linear-Kombinat. der $b_1 \ldots b_r$

Beispiel:

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix}0&1\\2&1\\1&1\end{pmatrix} \\ a_1 \quad a_2\end{array} \begin{array}{cl}\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&0&1\end{pmatrix} & \begin{array}{l} b_1\\ b_2\end{array}\end{array} = \begin{array}{cl} \begin{array}{ccc} a_1-a_2 & 2a_1 & 3a_1+a_2\end{array} & \\ \begin{pmatrix}-1&0&1\\1&4&7\\0&2&4\end{pmatrix} & \begin{array}{l} b_2\\2b_1+b_2\\b_1+b_2\end{array}\end{array}$$

Und nun: gegeben $m \times n$ Matrix M mit Spaltenrang r

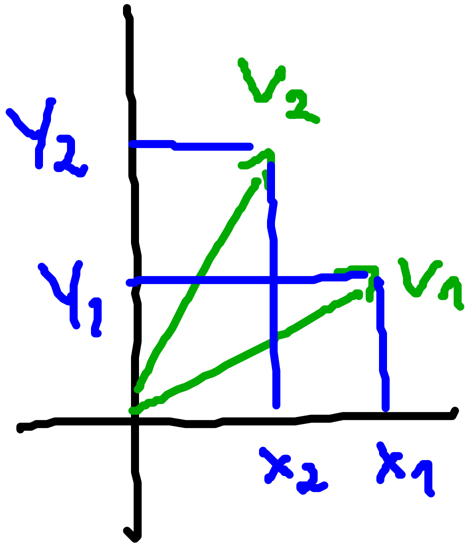
$$\underbrace{\begin{pmatrix} | & & | \\ s_1 & \dots & s_n \\ | & & | \end{pmatrix}}_{M} = \underbrace{\begin{pmatrix} | & & | \\ a_1 & \dots & a_r \\ | & & | \end{pmatrix}}_{\text{$a_1 \dots a_r$ seien Basis des Spaltenraums}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} - & b_1 & \to \\ & \vdots & \\ - & b_r & - \end{pmatrix}}_{\text{geeignet gewählte Matrix}} = \underbrace{\begin{pmatrix} - & z_1 & - \\ & \vdots & \\ - & z_m & - \end{pmatrix}}_{\text{Die Zeilen sind Linearkomb. der $b_1 \dots b_r$}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \text{Zeilenrang} \leq r = \text{Spaltenrang} \\ \text{Analog: Spaltenrang} \leq \text{Zeilenrang} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Zeilenrang} \\ = \text{Spaltenrang} \end{array}$$

q.e.d

Zeilenrang = Spaltenrang

Beispiel: M sei 2×2 Matrix über $\mathbb{R}$

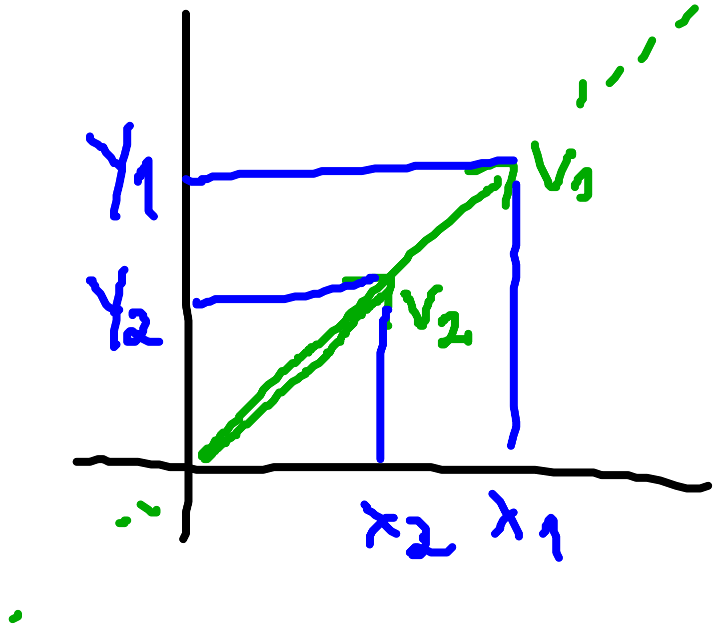


$$\begin{pmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} - & w_1 & - \\ - & w_2 & - \end{pmatrix}$$

Angenommen $v_1 = \lambda v_2$, $\lambda \neq 0$ Also: Spalten linear abhängig

(μ ist Steigung)



$\Rightarrow \exists\, \mu$ mit

$x_1 \cdot \mu = y_1$

$x_2 \cdot \mu = y_2$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \mu = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow w_1, w_2$ linear abh.

Spezieller Fall: Matrix sei quadratisch $n \times n$

$$\begin{array}{cc} & n \\ n & \begin{pmatrix} & & \\ & M & \\ & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} \vert \\ x \\ \vert \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vert \\ b \\ \vert \end{pmatrix}$$

Eindeutig lösbar g.d.w.

$$\operatorname{rang}(M) = n$$

Bew: $\operatorname{rang}(M) = n$

$\iff$ Spalten bilden eine Basis des K^n

$\iff$ jedes b eindeutig aus den Spalten kombinierbar ist.

Sei M eine $n \times n$ Matrix

Kriterien für eindeutige Lösbarkeit von $Mx = b$

(i) $\mathrm{Bild}(f_M) = K^n$

(ii) $\mathrm{Kern}(f_M) = \{\vec{0}\}$

(iii) $\mathrm{rang}(M) = n$

(iv) alle Spalten sind linear unabh.

(v) alle Spalten spannen den K^n auf

(vi) die Zeilen spannen den K^n auf

(vii) die Zeilen sind linear unabh.

(viii) $Mx = \vec{0}$ ist eindeutig lösbar

(ix) M ist invertierbar (nächstes Mal)

(x) $\det(M) \neq 0$ (nächste Woche)