Letztes Mal: Lineare Transformationen als geometrische Abbildungen

In der Ebene

linear: Scherungen, Drehung um O
Spiegelungen an Achsen durch O
Skalierungen um O .....

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Nicht linear: Translation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$$

„Trick" wie man Translationen doch als lineare Abbildungen schreiben kann

Betrachte statt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ den Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

lineare Abb: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \\ 1 \end{pmatrix}$$

Translation im $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+t_x \\ y+t_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Verkettung der Abb. durch Matrizenmultiplikation

Allg. Affine Abb.

$$\begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Neues Thema: Lineare Gleichungssysteme (5.2)

Aufgabe: Löse ein Problem der Form:

- Gegeben M, b
- gesucht x

$$M \cdot x = b$$

Matrix Vektoren

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 6 & 11 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} 3x + 4y - 1z &= 8 \\ 6x + 11y &= 7 \\ 3x + 1y - 1z &= 4 \end{aligned}$$

Möglichkeiten für die Lösungsmenge:

- Eindeutige Lösung
- Gar keine Lösung
- Unendlich viele Lösungen

Wichtige Tatsache!

gilt: $a_1 x_1 + \ldots\ldots + a_n x_n = A$

und: $b_1 x_1 + \ldots\ldots + b_n x_n = B$

so gilt auch: $(\lambda a_1 + b_1) x_1 + \ldots\ldots + (\lambda a_n + b_n) x_n = \lambda A + B$

---

aus: $3x + 4y - 2 = 8$ $\quad | \lambda = -2$

und: $6x + 11y \quad = 23$

folgt $\boxed{0 \cdot x} + 3y + 2z = 7$

Es ist möglich gezielt Variablen zu eliminieren

Lineare Gleichungssysteme (LGS) Beispielsammlung!

①

$$\begin{aligned} 3x + 4\overset{=1}{y} - \overset{=2}{z} &= 8 \\ 3y + 2\overset{=2}{z} &= 7 \\ 2z &= 4 \end{aligned}$$

Dreiecksform

$\Rightarrow x = 2$

$\Rightarrow y = 1$

$\Rightarrow z = 2$

Lösung durch Rückwärts einsetzen.

---

②

$$\begin{aligned} 3x + 4y - z &= 8 \\ 6x + 11y \quad &= 23 \\ 3x + y - z &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 6 & 11 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 23 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{II} - 2\,\mathrm{I}$, $\mathrm{III} - \mathrm{I}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{III} + \mathrm{II}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(3)

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Unendlich viele Lösungen

$z =$ beliebig

$3y = 7 - 2z$

$3x = 8 - 4y + z$

(4)

f

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Unendlich viele Lös.

$z =$ beliebig

$3y = -2z$

$3x = -4y + z$

Lösungsmenge ist Vektorraum $= \ker(f)$

(5)

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gar keine Lösungen

$0 \cdot z = 1$

Elementare Zeilenoperationen:

Satz Die folgenden Operationen ändern nichts an der Lösungsgesamtheit eines LGS

(i) Vertauschen zweier Zeilen (Bew klar)

(ii) Multiplikation einer Zeile mit $\lambda \neq 0$

Bew: Sei $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$ die Originalzeile

Betrachte $\lambda a_1x_1 + \dots + \lambda a_nx_n = \lambda b$

teilen durch λ

(iii) Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

Bew (iii) Seien

$a_1 x_1 + \ldots\ldots + a_n x_n = b$ $\quad Z_1$

$c_1 x_1 + \ldots\ldots + c_n x_n = d$ $\quad Z_2$

die Originalzeilen

bisher

Aus Z_1 und Z_2

folgt $\lambda Z_1 + Z_2$

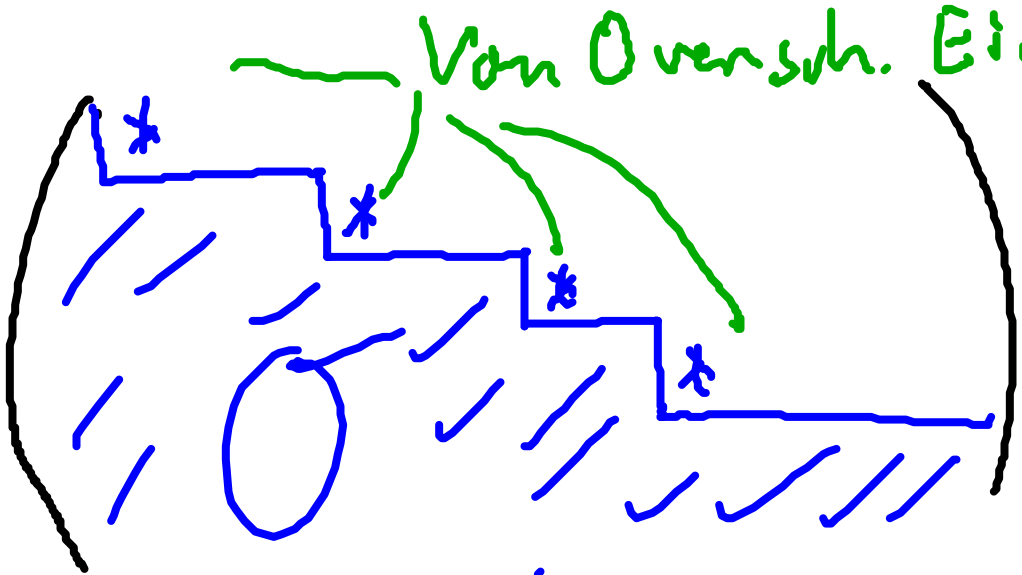
Zeige aus: $\sum a_i x_i = b$ $\leftarrow Z_1$

und $\sum ((\lambda a_i + c_i) x_i) = \lambda b + d$ folgt $\sum c_i x_i = d$

Z_3

Aus Z_1 und Z_3 folgt $Z_3 - (\lambda Z_1)$ das ist Z_2

Durch geeignetes Hintereinanderausführen von elementaren Zeilenoperationen (i), (ii), (iii) kann jedes LGS auf Zeilenstufenform gebracht werden.



jede Zeile hat mehr führende Nullen als die vorherige

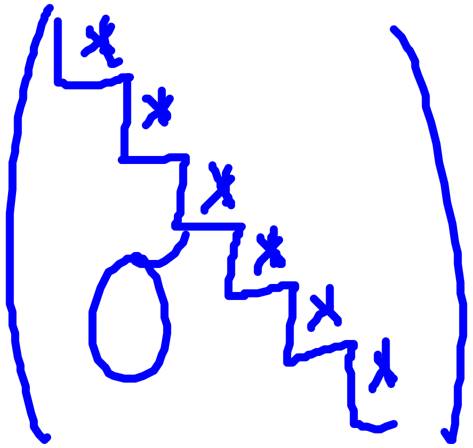
↳ Gauß Algorithmus

Durch Rückwärts Einsetzen lösbar

Achtung!

- Rundungsfehler anfällig
- Anz der Rechenop ist $O(n^3)$

Gutartiger Spezialfall der Zeilenstufenf.



jede Zeile hat genau eine führende Null mehr, Quadratische Matrix

$\Rightarrow$ eindeutige Lösung

Elementaren Zeilenumformungen „sind" Matrizenmultiplik.

Bsp 2×2

Vertausche

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c&d\\a&b\end{pmatrix}$$

Skaliere

$$\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda a&\lambda b\\c&d\end{pmatrix}$$

Addiere Vielfaches

$$\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\\lambda a+c&\lambda b+d\end{pmatrix}$$

Allgemein

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array}\\ \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix}1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1\end{pmatrix}\end{array}$$

Vertausche Z_i und Z_j

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & i & & \end{array}\\ \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix}1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1\end{pmatrix}\end{array}$$

Skaliere Z_i

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & i & & \end{array}\\ \begin{array}{c} \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix}1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & \ddots & \\ & & & & \ddots \\ & & & & 1\end{pmatrix}\end{array}$$

$Z_j \Leftarrow Z_j + \lambda Z_i$