Aufgabe 100. Berechnen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenvektoren der reellen Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 5 & -5 & 7 \\ -4 & 3 & -5 \\ -7 & 4 & -8 \end{pmatrix}.$$

<u>LÖSUNG:</u>

Ein Vektor $v \neq 0$ ist Eigenvektor der quadratischen Matrix A zum Eigenwert $\lambda \Leftrightarrow Av = \lambda v,\ v \neq 0$
$\Leftrightarrow (A - \lambda E_3)v = 0,\ v \neq 0 \Leftrightarrow \lambda$ ist Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\chi_A(\lambda) := det(A - \lambda E_3)$
Das charakteristische Polynom der Matrix A ist:

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) = det(A - \lambda E_3) = det(&\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ -1 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}) \\ &= (1-\lambda)\cdot(3-\lambda)\cdot(1-\lambda) - (-1)\cdot(3-\lambda)\cdot(-1) = (3-\lambda)\cdot(1-2\lambda+\lambda^2-1) \\ &= -\lambda\cdot(2-\lambda)\cdot(3-\lambda)\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ sind die Eigenwerte von A.

Beachte: Mögliche Linearfaktoren ausklammern! Die ausmultiplizierte Form $-\lambda^3 + 5\cdot\lambda^2 - 6\cdot\lambda$ ist zur Bestimmung der Eigenwerte (Nullstellen von $\chi_A(\lambda)$) nicht sinnvoll.

Bestimmung der zugehörigen Eigenvektoren durch das LGS: $(A - \lambda_i E_3)v_i = 0$:

$\lambda_1 = 0$**:** $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow v_1 = \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mu_1 \in \mathbb{R}.$

Beachte: Die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda = 0$ liegen im $Kern(A)$!

$\lambda_2 = 2$**:** $\left(\begin{array}{ccc|c} 1-2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3-2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1-2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow v_2 = \mu_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mu_2 \in \mathbb{R}.$

$\lambda_3 = 3$**:** $\left(\begin{array}{ccc|c} 1-3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3-3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1-3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow v_3 = \mu_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},$

$\mu_3 \in \mathbb{R}$.

Die Matrix A besitzt somit 3 verschiedene Eigenwerte. Die zugehörigen Eigenvektoren sind linear unabhängig und bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$, vgl. Vorlesung.

Zusatz: Die Matrix A ist wie folgt diagonalisierbar:
Für $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$ gilt mit der Transformationsmatrix $T = (v_1, v_2, v_3)$:

$$T^{-1}\cdot A\cdot T = T^{-1}\cdot A\cdot(v_1, v_2, v_3) = T^{-1}\cdot(Av_1, Av_2, Av_3) = T^{-1}\cdot(\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \lambda_3 v_3) =$$

$$= (\lambda_1 T^{-1}v_1, \lambda_2 T^{-1}v_2, \lambda_3 T^{-1}v_3) = (\lambda_1 e_1, \lambda_2 e_2, \lambda_3 e_3) = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

Hier ausführlich:

$$T^{-1}\cdot A\cdot T = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -4 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = D$$

(Einfache Darstellung einer Abbildung nach geeignetem Basiswechsel $A = T\cdot D\cdot T^{-1}$)

Das charakteristische Polynom der Matrix B ist:

$$\begin{aligned}
\chi_B(\lambda) = det(B - \lambda E_3) = det(&\begin{pmatrix} 5-\lambda & -5 & 7 \\ -4 & 3-\lambda & -5 \\ -7 & 4 & -8-\lambda \end{pmatrix}) \\
&= (5-\lambda)\cdot(3-\lambda)\cdot(-8-\lambda) + (-5)\cdot(-5)\cdot(-7) + 7\cdot(-4)\cdot 4 \\
&\quad - (-7)\cdot(3-\lambda)\cdot 7 - 4\cdot(-5)\cdot(5-\lambda) - (-8-\lambda)\cdot(-4)\cdot(-5) \\
&= (5-\lambda)\cdot(-24+5\cdot\lambda+\lambda^2) - 7\cdot 25 - 7\cdot 16 + 49\cdot(3-\lambda) + 20\cdot(5-\lambda) - 20\cdot(-8-\lambda) \\
&= -120 + 49\cdot\lambda - \lambda^3 - 287 + 147 - 49\cdot\lambda + 100 + 160 = -\lambda^3
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ist dreifacher Eigenwert von B.

Bestimmung der zugehörigen Eigenvektoren durch das LGS: $(B - \lambda E_3)v = 0$ mit $\lambda = 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -5 & 7 & 0 \\ -4 & 3 & -5 & 0 \\ -7 & 4 & -8 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & -5 & 0 \\ -7 & 4 & -8 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & -10 & 6 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow v = \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}.$$

Bis auf skalare Vielfache ist $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ der einzige Eigenvektor von B. $Kern(B)$ ist somit eindimensional.

Beachte: $Det(A) = 0 \Leftrightarrow 0$ ist Eigenwert von $A \Leftrightarrow Dim(Kern(A)) \geq 1 \Leftrightarrow A$ ist nicht invertierbar.

P 101. Eine 3×3-Matrix $A = (a_{ik}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ habe die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$.

1. Zeigen Sie, dass die Summe der Eigenwerte von A gleich der Spur von A ist mit $spur(A) := a_{11} + a_{22} + a_{33}$ und dass das Produkt der Eigenwerte von A gleich der Determinante von A ist.
2. Welche Folgerungen ergeben sich aus $det(A) = 0$ und $spur(A) = 0$ für die Eigenwerte und den Kern von A.

1.)

(I) λ_0 ist Eigenwert von $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \det \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda_0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda_0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda_0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$$\chi_A(\lambda_0) = (a_{11}-\lambda_0)(a_{22}-\lambda_0)(a_{33}-\lambda_0) + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{31}a_{13}(a_{22}-\lambda_0) - a_{32}a_{23}(a_{11}-\lambda_0) - a_{21}a_{12}(a_{33}-\lambda_0) =$$

Ordnen nach Potenzen von λ_0

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{13}a_{22} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$
$$- (a_{11}a_{22} + a_{22}a_{33} + a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13} - a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12})\lambda_0$$
$$+ (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda_0^2 - \lambda_0^3 =$$
$$= \det(A) - (a_{11}a_{22} + a_{22}a_{33} + a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13} - a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12})\lambda_0$$
$$+ spur(A)\lambda_0^2 - \lambda_0^3$$

(II) A hat Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \Leftrightarrow \chi_A(\lambda)$ zerfällt in Linearfaktoren:

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda) =$$
$$= \lambda_1\lambda_2\lambda_3 - (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3)\lambda + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\lambda^2 - \lambda^3$$

(III) Koeffizientenvergleich liefert $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \det A$ und $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = spur A$

2.) $\det(A) = 0 \wedge spur(A) = 0 \Rightarrow \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0 \wedge \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$

$\Rightarrow$ o.E. $\lambda_1 = 0 \wedge \lambda_2 = -\lambda_3$

Fall $\lambda_2 \neq 0 \Rightarrow$ A hat drei verschiedene Eigenwerte; die zugehörigen Eigenvektoren sind linear unabhängig

$\Rightarrow \dim(Kern(A)) = 1$ $\quad$ ($Kern(A)$ = Eigenraum zu $\lambda_1 = 0$)

Fall $\lambda_2 = 0 \Rightarrow$ A hat dreifachen Eigenwert 0 und $\dim(Kern(A)) \geq 1$.

z.B. $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim(Kern(A_1)) = 3$; $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim(Kern(A_2)) = 2$

oder $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim(Kern(A_3)) = 1$. $\quad$ ($Kern(A)$ = Eigenraum zu $\lambda = 0$)

Bem: Es gilt allgemein: $\sum_i \lambda_i = spur(A)$, $\prod_i \lambda_i = \det(A)$ für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

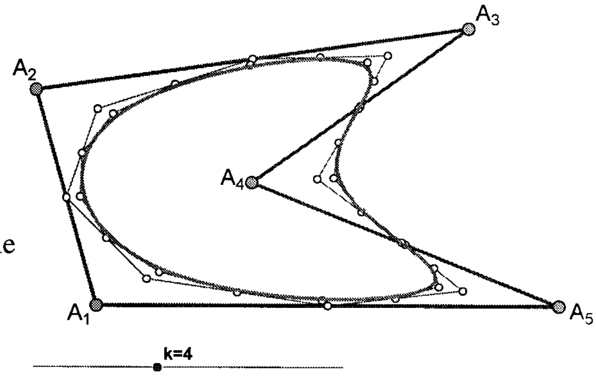
P 102. Subdivision-Curves

Bei Subdivision-Curves geht man von einem Kontrollpolygon $A_1, \cdots, A_n, n \in \mathbb{N}$ aus und ersetzt die n Punkte sukzessive durch folgende $2n$ Punkte

$$A'_{2i-1} = \frac{1}{2}A_i + \frac{1}{2}A_{i+1} \quad \text{und} \quad A'_{2i} = \frac{1}{8}A_i + \frac{3}{4}A_{i+1} + \frac{1}{8}A_{i+2}\ ,\ 1 \le i \le n$$

Dabei setzt man $A_{n+1} = A_1$ und $A_{n+2} = A_2$, um geschlossene Kurven zu bekommen.

Zeigen Sie, dass die Punkte $A_1^{(k)}, A_2^{(k)}, A_3^{(k)}$ des k-ten Schrittes für $k \to \infty$ gegen einen gemeinsamen Punkt P streben.



Bestimmen Sie dazu das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Zu welcher Diagonalmatrix D ist die Matrix S ähnlich ? Geben Sie insbesondere die Transformationsmatrix T an mit $T^{-1}ST = D$.

Wie erhält man daraus $A_i^{(k)}$ und $\lim\limits_{k\to\infty} A_i^{(k)}$ für $1 \le i \le 3$?

$v \neq 0$ ist EV von S zu EW $\lambda \Leftrightarrow (S-\lambda E)v = 0,\ v \neq 0 \Leftrightarrow \chi_S(\lambda) = \det(S-\lambda E) = 0$

$$\chi_S(\lambda) = \det\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4}-\lambda & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\lambda \end{pmatrix} = (\tfrac{1}{2}-\lambda)^2(\tfrac{3}{4}-\lambda) - \tfrac{1}{16}(\tfrac{1}{2}-\lambda)\cdot 2 = (\tfrac{1}{2}-\lambda)[\tfrac{3}{8} - \tfrac{5}{4}\lambda + \lambda^2 - \tfrac{1}{8}] =$$

$$= (\tfrac{1}{2}-\lambda)\cdot\tfrac{1}{4}\cdot(1-5\lambda+4\lambda^2) \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \tfrac{1}{2} \vee \lambda_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{8} = \frac{5\pm 3}{8} = \begin{cases} 1 & \vee \\ \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\text{EV zu } \lambda_1 = 1: \left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow v_1 = \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mu_1 \in \mathbb{R}$$

$$\text{EV zu } \lambda_2 = \tfrac{1}{2}: \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & +\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow v_2 = \mu_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mu_2 \in \mathbb{R}$$

$$\text{EV zu } \lambda_3 = \tfrac{1}{4}: \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow v_3 = \mu_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \mu_3 \in \mathbb{R}$$

Mit $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$ gilt für $T = (v_1\, v_2\, v_3)$: $T^{-1}ST = T^{-1}S(v_1, v_2, v_3) = T^{-1}(Sv_1, Sv_2, Sv_3) =$
$= T^{-1}(\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \lambda_3 v_3) = (\lambda_1 T^{-1}v_1, \lambda_2 T^{-1}v_2, \lambda_3 T^{-1}v_3) = (\lambda_1 e_1, \lambda_2 e_2, \lambda_3 e_3) = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$
und $S = TDT^{-1}$ also $S^k = \underbrace{(TDT^{-1})\cdot(TDT^{-1})\cdots(TDT^{-1})}_{k \text{ Faktoren}} = TD^kT^{-1}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} A_1^{(k)} \\ A_2^{(k)} \\ A_3^{(k)} \end{pmatrix} = S^k \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = TD^kT^{-1}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \text{ mit } \lim_{k\to\infty} D^k = \lim_{k\to\infty}\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & (\frac{1}{2})^k & \\ 0 & & (\frac{1}{4})^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnung von T^{-1}:

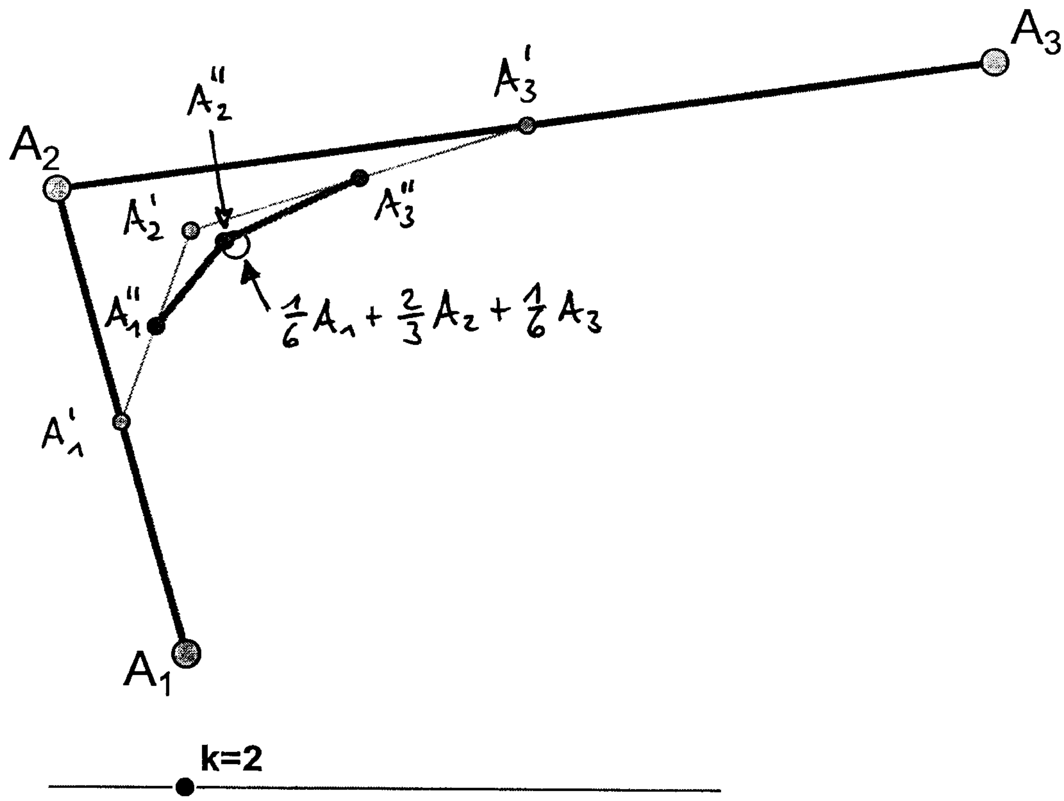
$$(T|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&-1&2&1&0&0\\ 1&0&-1&0&1&0\\ 1&1&2&0&0&1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&-1&2&1&0&0\\ 0&1&-3&-1&1&0\\ 0&2&0&-1&0&1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&-1&2&1&0&0\\ 0&1&-3&-1&1&0\\ 0&0&6&1&-2&1\end{array}\right) \sim$$

$$! \to \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&-1&0&1&0\\ 0&1&-3&-1&1&0\\ 0&0&1&\frac{1}{6}&\frac{-2}{6}&\frac{1}{6}\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&\frac{1}{6}&\frac{4}{6}&\frac{1}{6}\\ 0&1&0&\frac{-3}{6}&0&\frac{3}{6}\\ 0&0&1&\frac{1}{6}&\frac{-2}{6}&\frac{1}{6}\end{array}\right) = (E|T^{-1}) \Rightarrow T^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1&4&1\\ -3&0&3\\ 1&-2&1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty}\begin{pmatrix} A_1^{(k)}\\ A_2^{(k)}\\ A_3^{(k)}\end{pmatrix} = \lim_{k\to\infty}\left[T D^k T^{-1}\begin{pmatrix} A_1\\ A_2\\ A_3\end{pmatrix}\right] = T\left(\lim_{k\to\infty} D^k\right)T^{-1}\begin{pmatrix} A_1\\ A_2\\ A_3\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1&-1&2\\ 1&0&-1\\ 1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&0&0\\ 0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&4&1\\ -3&0&3\\ 1&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1\\ A_2\\ A_3\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1&0&0\\ 1&0&0\\ 1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&4&1\\ -3&0&3\\ 1&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1\\ A_2\\ A_3\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1&4&1\\ 1&4&1\\ 1&4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1\\ A_2\\ A_3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} A_1^{(k)} = \lim_{k\to\infty} A_2^{(k)} = \lim_{k\to\infty} A_3^{(k)} = \underline{\underline{\frac{1}{6}A_1 + \frac{2}{3}A_2 + \frac{1}{6}A_3 = P}}$$



Vgl. auch CINDERELLA-APPLETs auf der Homepage.

Bem: $A_1^{(k)}, A_2^{(k)}, A_3^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} P$ insgesamt erhält man aber trotzdem eine Kurve, da obiges bei geeigneter Nummerierung für jedes Punktetripel $A_i^{(k)} A_{i+1}^{(k)} A_{i+2}^{(k)}$ gilt.