**Aufgabe 93. Invertieren**

Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \lambda \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ invertierbar?

Sei nun $\lambda = 3$. Geben Sie $A^{-1}$ explizit an und bestimmen Sie die Urbilder von $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

unter der Abbildung $f : x \mapsto y = Ax$.

<u>LÖSUNG:</u>

$$(A|E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) (1) \leftrightarrow (3) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -3\cdot(1)+(2) \\ -2\cdot(1)+(3) \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & \lambda & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -1\cdot(2) \\ -2\cdot(2)+(3) \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \lambda-2 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \quad \exists A^{-1} \Leftrightarrow \lambda \neq 2.$$

Sei nun $\lambda = 3$. Die Rückwärtsubstitution liefert:

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) (2)+(3) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} (1)-(2) \\ \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) = (E_3|A^{-1}) \qquad \textbf{Probe:} \quad A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = E_3 \ \surd$$

$$x \in \mathbb{R}^3 : Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x = E_3 x = A^{-1}Ax = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -6 \\ 1 & -3 & 7 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Falls $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar ist, hat das LGS $Ax = b \ \ \forall b \in \mathbb{R}^n$ genau eine Lösung $x = A^{-1}b \in \mathbb{R}^n$.

**Aufgabe 94.** Berechnen Sie die Determinanten von $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 6 \\ 2 & 7 & 9 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

<u>LÖSUNG:</u>

**1. Weg:** Direkte Entwicklung von $det(A)$ z.B. nach der 1.Spalte (vgl. Vorlesung):

$$det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 6 \\ 2 & 7 & 9 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = 1 \cdot det \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 7 & 9 & 8 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} - 2 \cdot det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 7 & 9 & 8 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} + 2 \cdot det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} - 1 \cdot det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 6 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

$= 1 \cdot 104 - 2 \cdot (-3) + 2 \cdot (-13) - 1 \cdot 66 = 18.$

Die $3 \times 3-$)Determinanten lassen sich nach Sarrus berechnen, z.B. die erste:

$$det \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 7 & 9 & 8 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = 5 \cdot 9 \cdot 5 + 1 \cdot 8 \cdot 2 + 6 \cdot 7 \cdot 3 - 2 \cdot 9 \cdot 6 - 3 \cdot 8 \cdot 5 - 5 \cdot 7 \cdot 1 = 225 + 16 + 126 - 108 - 120 - 35 = 104.$$

Dieser direkte Rechenweg ist meist sehr zeitraubend und fehleranfällig und daher nicht zu empfehlen.

**2. Weg:** Entwicklung erst nach geeigneten **Determinanten-Umformungen:**

- Addition eines Vielfachen einer Zeile/Spalte zu einer anderen Zeile/Spalte ändert den Wert der Determinante nicht,
- Vertauschen zweier Zeilen/Spalten liefert Vorzeichenwechsel der Determinante,
- Division einer Zeile/Spalte mit einem Vielfachen $\lambda \neq 0$ liefert $\lambda-$faches der Determinante.

$$det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 6 \\ 2 & 7 & 9 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \overset{Zeilenumf.}{=} det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot det \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot det \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} =$$

$1 \cdot 3 - 3 \cdot (-5) = 3 + 15 = 18.$

**3. Weg:** Die Determinante von oberen oder unteren Dreiecksmatrizen oder von Diagonalmatrizen ist das Produkt ihrer Diagonalelemente $a_{ii}$.

$$det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 6 \\ 2 & 7 & 9 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 18 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 18 \cdot 1 = 18.$$

---

Subtraktion der 1. Zeile von den unteren Zeilen und anschließende Addition der unteren Zeilen zur 1. Zeile liefert eine untere Dreiecksmatrix:

$$det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$= 4 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 4.$

**Aufgabe 95. Hingucker.**
Bestimmen Sie folgende Determinanten ohne großen Rechenaufwand und geben Sie die verwendeten Rechenregeln an.

1.) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 2.) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 3.) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix}$ 4.) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \sqrt{2} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 15 \\ 0 & 0 & -6 & -\pi \end{vmatrix}$

<u>LÖSUNG:</u>
**Zulässige Determinanten-Umformungen:**

- Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile ändert den Wert der Determinante nicht,
- Vertauschen zweier Zeilen liefert Vorzeichenwechsel der Determinante,
- Division einer Zeile mit einem Vielfachen $\lambda \neq 0$ liefert $\lambda-$faches der Determinante.
- Wegen $det(A^T) = det(A)$ gelten diese Regeln auch für die Spalten von $A$.

1.) Vertauschung von erster mit vierter Zeile und Vertauschung von zweiter mit dritter Zeile wandelt die Matrix in Dreiecksgestalt um, ohne das Vorzeichen ihrer Determinante zu ändern (da wir *zwei* Vertauschungen vornehmen). Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist das Produkt ihrer Diagonalelemente. Somit gilt:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2^4 = 16$$

2.) Nach Vertauschung von zweiter mit dritter Zeile besitzt die Matrix in eine Blockstruktur mit quadratischen Blöcken in der Diagonalen und darunter einer Nullmatrix. Die Determinante einer solchen oberen Dreiecks-Blockmatrix ist das Produkt der Determinanten ihrer Diagonal-Blockmatrizen.
Es gilt also mit $* = 0$ oder beliebig:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & * & * \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & * & * \\ 0 & 0 & 5 & 7 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & * & * \\ 3 & 2 & * & * \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-7) \cdot (-6) = -42$$

3.) Die dritte Spalte ist die Summe der ersten beiden Spalten; somit sind die drei Spaltenvektoren linear abhängig, und ihre Determinante ist Null:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 0 \qquad [\text{Sarrus: } 1 \cdot 3 \cdot 7 + 2 \cdot 5 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 4 - 3 \cdot 3 \cdot 3 - 4 \cdot 5 \cdot 1 - 7 \cdot 2 \cdot 2 = \cdots = 0]$$

4.) Vertauschen von zweiter mit dritter Zeile und anschließende Addidtion des sechsfachen der dritten Zeile zur vierten Zeile liefert eine obere Dreiecksmatrix, deren Determinante das Produkt ihrer Diagonalelemente ist.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \sqrt{2} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 15 \\ 0 & 0 & -6 & -\pi \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & \sqrt{2} & 4 \\ 0 & 6 & 7 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -\pi \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & \sqrt{2} & 4 \\ 0 & 6 & 7 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\pi \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot 1 \cdot 6 \cdot 1 \cdot (-\pi) = 6\pi$$

**P 96.** Gegeben seien drei Punkte $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), z = (z_1, z_2)$ der kartesischen Koordinatenebene $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie:

1. Die Determinante $det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ liefert den doppelten (orientierten) Flächeninhalt des Dreiecks $\Delta xyz$.

2. Die Menge $\left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \right\}$ ist für $y \neq z$ die Verbindungsgerade der Punkte $y$ und $z$.

1.) $$\det \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=A} = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1-x_1 & z_1-x_1 \\ x_2 & y_2-x_2 & z_2-x_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & y_1-x_1 & z_1-x_1 \\ 0 & y_2-x_2 & z_2-x_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

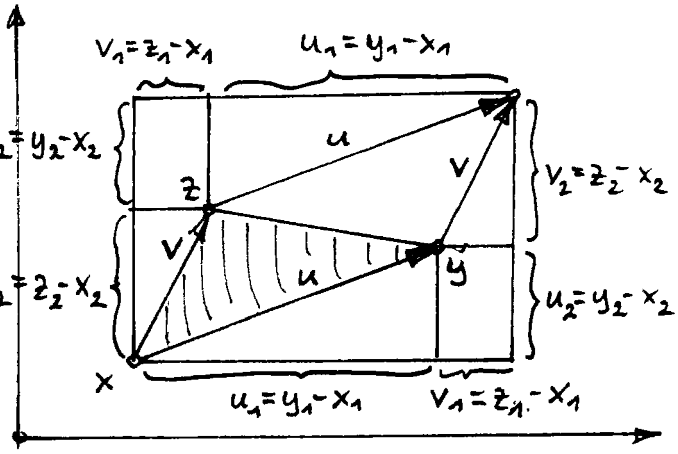
$= (y_1-x_1)(z_2-x_2) - (y_2-x_2)(z_1-x_1) =$

$= u_1 v_2 - u_2 v_1$

mit den Abkürzungen

$u = y - x$ und $v = z - x$

Ergänze das Dreieck zum Parallelogramm und betrachte nebenstehende Figur $\Rightarrow$




$$2 \cdot F_{\Delta xyz} = (u_1+v_1)(u_2+v_2) - u_1u_2 - v_1v_2 - 2v_1u_2 = u_1v_2 - v_1u_2 = \det A$$

2.) Nach 1) gilt: $\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} y_1-x_1 & z_1-x_1 \\ y_2-x_2 & z_2-x_2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} y_1-x_1 & z_1-y_1 \\ y_2-x_2 & z_2-y_2 \end{pmatrix}$

Mit $y \neq z$ gilt: $\begin{pmatrix} z_1-y_1 \\ z_2-y_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und damit

linear abhängig

$\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} y_1-x_1 & z_1-y_1 \\ y_2-x_2 & z_2-y_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1-x_1 \\ y_2-x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1-y_1 \\ z_2-y_2 \end{pmatrix}$ sind l.a.

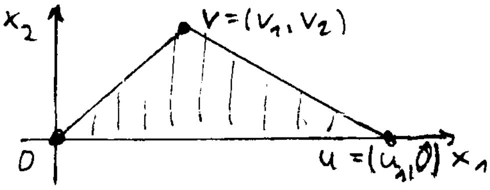
$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1-x_1 \\ y_2-x_2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} y_1-z_1 \\ y_2-z_2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} z_1-y_1 \\ z_2-y_2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (x_1, x_2)$ liegt auf der Verbindungsgeraden $yz$.

---

<u>zu 1) alternativ</u>: Drehe das Dreieck mit $D = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & t_1 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ so, dass die Seite $xy \parallel x_1$-Achse und wähle Translation $\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$ so, dass $x = (0,0) \Rightarrow$

$$\det A = \overbrace{\det D}^{=1} \det A = \det(D \cdot A) = \det \left[ \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & t_1 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right] = \det \begin{pmatrix} 0 & u_1 & v_1 \\ 0 & 0 & v_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$




$$= u_1 \cdot v_2 = 2 \cdot F_{\Delta 0uv} = 2 \cdot F_{\Delta xyz}$$

<u>Alternativ zu 2)</u> $x \in$ Verb.ger. $yz \Leftrightarrow F_{\Delta xyz} = 0 \Leftrightarrow \det(\cdot\cdot) = 0$.