Aufgabe 97. Die Telefonmatrix und andere Kuriositäten.
Berechnen Sie folgende Determinanten:

$$1.)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \qquad 2.)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{vmatrix}$$

LÖSUNG:

Um die gesuchten Determinanten zu berechnen, nutzen wir fast ausschließlich das Kriterium, dass das Ersetzen einer Zeile durch dieselbe Zeile plus das Vielfache einer anderen Zeile den Wert der Determinante nicht verändert.

$$1.)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{lcl} & & \\ \text{II} & + & (-4)\cdot \text{I} \\ \text{III} & + & (-7)\cdot \text{I} \end{array}$$

$$= 0, \quad \text{da die letzten beiden Zeilen linear abhängig sind}$$

$$2.)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 & 14 \\ 0 & 3 & 9 & 19 & 34 \\ 0 & 4 & 14 & 34 & 69 \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{lcl} & & \\ \text{II} & + & (-1)\cdot \text{I} \\ \text{III} & + & (-1)\cdot \text{I} \\ \text{IV} & + & (-1)\cdot \text{I} \\ \text{V} & + & (-1)\cdot \text{I} \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 22 \\ 0 & 0 & 6 & 22 & 53 \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{lcl} & & \\ & & \\ \text{III} & + & (-2)\cdot \text{II} \\ \text{IV} & + & (-3)\cdot \text{II} \\ \text{V} & + & (-4)\cdot \text{II} \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 17 \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{lcl} & & \\ & & \\ & & \\ \text{IV} & + & (-3)\cdot \text{III} \\ \text{V} & + & (-6)\cdot \text{III} \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{lcl} & & \\ & & \\ & & \\ & & \\ \text{V} & + & (-4)\cdot \text{III} \end{array}$$

$$= 1$$

Bemerkung: In der zweiten Determinante $|P|$ sind die Zahlen des Pascal-Dreiecks angeordnet, die man als Binomialkoeffizienten erhält: $p_{ik} = \binom{i+k-2}{k-1}$, $1 \le i, k \le 5$ mit $\binom{r}{s} = \frac{r!}{s!(r-s)!}$.

Aufgabe 98. Eine alte Klausuraufgabe
Sei M die Menge aller reellen invertierbaren 3x3-Matrizen A mit $\det(A) = 1$ oder $\det(A) = -1$, also

$$M = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} | \, |\det(A)| = 1\}.$$

1. Zeigen Sie, dass $(M, \cdot)$ eine Gruppe ist, wobei „·“ die Multiplikation von Matrizen bezeichnet. Benutzen Sie die Eigenschaften der Multiplikation von Matrizen sowie die Rechenregeln für Determinanten.
2. Zeigen Sie, dass $\{-1, +1\}$ eine Untergruppe von $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist.
3. Zeigen Sie, dass die Abbildung
$$\det : M \to \{-1, +1\}$$
ein Gruppenhomomorphismus ist.

<u>LÖSUNG:</u>

Sei $M := \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \, | \, |det(A)| = 1\}$.

1. $(M, \cdot)$ ist eine Gruppe: (Nachweis der Gruppenaxiome)
   - Abgeschlossenheit: $\forall A, B \in M : det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B) = \pm 1 \Rightarrow (A \cdot B) \in M$ (Determinanten-Multiplikationssatz !)
   - Neutrales Element: $\exists \, E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$, so dass $\forall A \in M : A \cdot E_3 = A$, da $det(E_3) = +1$.
   - Inverse Elemente: $\forall A \in M, \exists \, A^{-1} \in M : A \cdot A^{-1} = E_3$, da Matrizen A mit $det(A) \neq 0$ invertierbar sind und $det(A^{-1}) = \dfrac{1}{det(A)} \quad \Rightarrow |det(A^{-1})| = 1$.
   Beachte: $det(A) \cdot det(A^{-1}) = det(A \cdot A^{-1}) = det(E_3) = 1$.
   - Assoziativität: Die Matrixmultiplikation ist assoziativ (laut Vorlesung).
2. $(H := \{-1, 1\}, \cdot)$ ist Untergruppe von $(\mathbb{R}\setminus\{0\}, \cdot)$ (Nachweis mit Untergruppen-Kriterium)
   - nicht leer: $H = \{-1, 1\} \neq \emptyset$ klar !
   - abgeschlossen: $1 \cdot 1 = 1 \in H;\ 1 \cdot (-1) = -1 \in H;\ (-1) \cdot 1 = -1 \in H;\ (-1) \cdot (-1) = 1 \in H$.
   - inverse Elemente: $1^{-1} = 1 \in H$ und $(-1)^{-1} = -1 \in H$.
3. $det : M \longrightarrow H$ ist wegen des Determinanten-Multiplikationssatzes ein Gruppenhomomorphismus: $\forall A, B \in M : det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$

H 99. Eine alte Klausuraufgabe

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 6 & -9 & 6 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ einer linearen Abbildung $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ x & \mapsto & Ax \end{cases}$.

a) Geben Sie für $Kern(f)$ und $Bild(f)$ jeweils die Dimension und eine Basis an.

b) Zeigen Sie, dass $\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A ist.

c) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A und geben Sie alle Eigenwerte von A an.

Zusatzfrage: Geben Sie alle Eigenvektoren von A an.

a) $Kern(f) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = 0\} \Rightarrow$ homogenes LGS:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & -9 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = \lambda \in \mathbb{R} \\ x_2 = \lambda/3 \\ x_1 = -\lambda/2 \end{array}$$

Mit $\lambda = 6\mu \Rightarrow Kern(f) = \left\{ x = \mu \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \mid \mu \in \mathbb{R} \right\}$, $\dim(Kern(f)) = 1$, $B_{Kern(f)} = \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right)$

Basen

$Rang(A) = \dim(Bild(f)) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim(Kern(f)) = 3 - 1 = 2$, $B_{Bild(f)} = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix} \right)$

b) $A \cdot v = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 6 & -9 & 6 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-36 \\ 12+54+18 \\ -36-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 \\ 84 \\ -42 \end{pmatrix} = -14 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow -14$ ist Eigenwert von A

c) $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_3) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 6 & 0 \\ 6 & -9-\lambda & 6 \\ 0 & 6 & -2-\lambda \end{pmatrix} =$

$$= (4-\lambda)(-9-\lambda)(-2-\lambda) - 36(4-\lambda) - 36(-2-\lambda) =$$

$$= (4-\lambda)(18 + 11\lambda + \lambda^2) - 2 \cdot 36 + 72\lambda =$$

$$= -\lambda^3 - 7\lambda^2 + 26\lambda + 4 \cdot 18 - 2 \cdot 36 + 72\lambda =$$

$$= -\lambda^3 - 7\lambda^2 + 98\lambda = -\lambda(\lambda^2 + 7\lambda - 98)$$

Eigenwerte von A sind Nullstellen von $\chi_A(\lambda)$:

$\lambda_1 = 0$ (vgl. a)!), $\lambda_2 = -14$ (vgl. b)!) $\Rightarrow \lambda_3 = -\frac{98}{-14} = 7$ (Vieta $\lambda_2 \cdot \lambda_3 = -98$)

oder mit Formel für quadratische Gleichung

<u>Zusatz:</u>

Eigenvektor zu $\lambda_1 = 0$ nach a): $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, Eigenvektor zu $\lambda_2 = -14$ nach b): $\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$

Eigenvektor zu $\lambda_3 = 7$: $(A - 7E|0) = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & -16 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & -9 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ oder ein Vielfaches davon!