TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR.DR. JÜRGEN RICHTER-GEBERT, DR. HERMANN VOGEL

Lineare Algebra und analytische Geometrie 1 & Mathematik für Physiker 1 (WS 2007/08)
— Aufgabenblatt 12 (28. Januar 2008) —

— Präsenzaufgaben —

P 93. Invertieren

Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \lambda \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ invertierbar?

Sei nun $\lambda = 3$. Geben Sie A^{-1} explizit an und bestimmen Sie die Urbilder von $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ unter der Abbildung $f : x \mapsto y = Ax$.

P 94. Berechnen Sie die Determinanten von $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 6 \\ 2 & 7 & 9 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

P 95. Hingucker.

Bestimmen Sie folgende Determinanten ohne großen Rechenaufwand und geben Sie die verwendeten Rechenregeln an.

1.) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 2.) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 3.) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix}$ 4.) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \sqrt{2} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 15 \\ 0 & 0 & -6 & -\pi \end{vmatrix}$

P 96. Gegeben seien drei Punkte $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), z = (z_1, z_2)$ der kartesischen Koordinatenebene $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie:

1. Die Determinante $det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ liefert den doppelten (orientierten) Flächeninhalt des Dreiecks Δxyz.
2. Die Menge $\left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \right\}$ ist für $y \neq z$ die Verbindungsgerade der Punkte y und z.

— *Hausaufgaben* —

H 97. Die Telefonmatrix und andere Kuriositäten.
Berechnen Sie folgende Determinanten:

$$1.)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \qquad 2.)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{vmatrix}$$

H 98. Eine alte Klausuraufgabe
Sei M die Menge aller reellen invertierbaren 3x3-Matrizen A mit $\det(A) = 1$ oder $\det(A) = -1$, also

$$M = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} | \, |\det(A)| = 1\}.$$

1. Zeigen Sie, dass $(M, \cdot)$ eine Gruppe ist, wobei „·“ die Multiplikation von Matrizen bezeichnet.
   Benutzen Sie die Eigenschaften der Multiplikation von Matrizen sowie die Rechenregeln für Determinanten.
2. Zeigen Sie, dass $\{-1, +1\}$ eine Untergruppe von $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist.
3. Zeigen Sie, dass die Abbildung
   $$\det : M \to \{-1, +1\}$$
   ein Gruppenhomomorphismus ist.

H 99. Eine alte Klausuraufgabe
Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 6 & -9 & 6 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ einer linearen Abbildung $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ x & \mapsto & Ax \end{array} \right.$.

a) Geben Sie für $Kern(f)$ und $Bild(f)$ jeweils die Dimension und eine Basis an.

b) Zeigen Sie, dass $\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A ist.

c) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A und geben Sie alle Eigenwerte von A an.

Zusatzfrage: Geben Sie alle Eigenvektoren von A an.

Abgabetermin ist Freitag der 08.02.2008 bis 12:00 Uhr (Einwurfkasten im Untergeschoss des FMI-Gebäudes).

— *Informationen* —

- Bringen Sie zur Klausur bitte Ihren Studentenausweis und einen amtlichen Lichtbildausweis mit.