Aufgabe 86. Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Welche der folgenden Bedingungen sind *hinreichend* dafür, dass das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mindestens eine Lösung $x \in \mathbb{R}^m$ besitzt?

- ☐ $n > m$.
- ☐ Die Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.
- ☐ $n = m$.
- ☐ $n < m$ und $\operatorname{rang}(A) = n$.
- ☐ A ist die Einheitsmatrix.
- ☐ $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A, b)$.
- ☐ Die Zeilenvektoren von A sind linear unabhängig.
- ☐ $b = 0$.

<u>LÖSUNG:</u>

Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, d.h. $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ mit n Gleichungen (Zeilen) für m Unbekannte (Spalten) hat genau dann mindestens eine Lösung, wenn $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A, b)$ gilt. Mit diesem Kriterium können jetzt alle Aussagen untersucht werden.

☐ $n > m$. [Z.B. $m = 1, n = 2$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (x_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ besitzt keine Lösung !]

☐ Die Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig. [Siehe Fall $n > m$!]

☐ $n = m$. [Z.B. $n = m = 2$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ besitzt keine Lösung !]

☒ $n < m$ und $\operatorname{rang}(A) = n$. [Da die erweiterte Matrix (A, b) ebenfalls n Zeilen besitzt, muss $\operatorname{rang}(A, b) = n$ sein.]

☒ A ist die Einheitsmatrix. [$\Rightarrow Ax = x = b$]

☒ $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A, b)$. [Siehe Vorlesung bzw. Vorbemerkung]

☒ Die Zeilenvektoren von A sind linear unabhängig. [Dann ist $\operatorname{rang}(A) = n$. Da die erweiterte Matrix (A, b) ebenfalls n Zeilen besitzt, muss $\operatorname{rang}(A, b) = n$ sein.]

☒ $b = 0$. [Da $x = 0$ eine Lösung ist].

Bemerkung:
Für $n > m$ nennt man das System überbestimmt.
Ein solches System hat für $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A, b)$ eine $m - \operatorname{rang}(A)$ parametrige Lösung.

Für $n < m$ nennt man das System unterbestimmt.
Ein solches System hat für $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A, b)$ eine $m - \operatorname{rang}(A)$ parametrige Lösung.

Aufgabe 87. Gegeben seien die Mengen $L_1 := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \wedge \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$ und

$L_2 := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x = \begin{pmatrix}0\\0\\\alpha\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}1\\\beta\\-1\end{pmatrix} \wedge \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt $L_1 = L_2$?
2. Geben Sie ein nicht-triviales lineares Gleichungssystem $Ax = c$ mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und einem Vektor $c \in \mathbb{R}^n$ an, das $L_1 = L_2$ als Lösung besitzt.

<u>LÖSUNG:</u>

1. L_1 läßt sich auffassen als Nebenklasse $L_1 = [\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}]_{U_1} = [b_1]_{U_1}$ bezüglich des UVR $U_1 := span(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix})$,

   entsprechend gilt: $L_2 = [\begin{pmatrix}0\\0\\\alpha\end{pmatrix}]_{U_2} = [b_2]_{U_2}$ bezüglich des UVR $U_2 := span(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\\beta\\-1\end{pmatrix})$.

   Geometrische Deutung: L_1, L_2 sind 2-dimensionale Ebenen im 3-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$. $L_1 = L_2 \Longleftrightarrow$

   - $U_1 = U_2 \Leftrightarrow \beta = 0$, da $\begin{pmatrix}1\\\beta\\-1\end{pmatrix} \in U_1 \Leftrightarrow \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix}1\\\beta\\-1\end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}\lambda = 1\\ \mu = -1\\ \beta = 0\end{matrix}$

     und $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \in U_1 \Rightarrow U_2 \subseteq U_1$. Mit $dim(U_1) = dim(U_2) = 2 \Rightarrow U_1 = U_2$.

   <u>und</u>

   - $b_1 := \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \in L_2$ bzw. $b_2 := \begin{pmatrix}0\\0\\\alpha\end{pmatrix} \in L_1 \Leftrightarrow \alpha = 2$, da $\begin{pmatrix}0\\0\\\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}\lambda = -1\\ \mu = -1\\ \alpha = 2\end{matrix}$

2. Wir suchen allgemeiner ein nicht-triviales lineares Gleichungssystem $Ax = c$, das L_1 <u>und</u> L_2 als Lösungen besitzt.

   Wegen $L_1, L_2 \in \mathbb{R}^3$ gilt: $m = 3$.

   Die Lösungsmenge L^{hom} eines homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$ ist der $Kern(A)$.
   Die Lösungsmenge L^{inhom} eines inhomogenen linearen Gleichungssystems $Ax = c \neq 0$ setzt sich aus einer Speziellen Lösung b mit $Ab = c$ und L^{hom} zusammen und bildet damit einen sog. affinen Raum, die Nebenklasse $[b]_{Kern(A)}$ des Kerns von A.

   Damit ist L_1, L_2 eine Lösung eines LGS $Ax = c \quad \Leftrightarrow \quad L_1 = [b_1]_{U_1}, L_2 = [b_2]_{U_2} \subseteq L^{inhom} = [b]_{Kern(A)}$
   $\Leftrightarrow \quad U_1, U_2 \subseteq Kern(A) \wedge b - b_1, b - b_2 \in Kern(A)$, also $2 = dim(U_{1,2}) \leq dim(Kern(A)) \leq m = 3$.
   Wegen $dim(Kern(A)) = 3 \Leftrightarrow A = 0$ (Nullmatrix) folgt $dim(Kern(A)) = 2$ und damit
   $Kern(A) = U_1 = U_2 \wedge$ (wähle o.E. $b = b_1$) $b_1 - b_2 \in U_1 = U_2 \quad \Rightarrow \quad L_1 = L_2$, vgl. 1.

   Wir suchen also $A = (a_1\ a_2\ a_3) \in \mathbb{R}^{n \times 3} \backslash \{0\}$ mit $Kern(A) = U_1 = span(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix})$ also:

   $(a_1\ a_2\ a_3) \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = a_1 + a_2 = 0 \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow a_1 = -a_2 \in R^n \ \wedge\ (a_1\ a_2\ a_3) \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = a_2 + a_3 = 0 \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow a_3 = -a_2 \in R^n$.
   Damit ist $A = (-a\ a\ -a)$ mit beliebigem $a \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, n \geq 1$.

   Für die rechte Seite c des linearen Gleichungssystems ergibt sich mit $A = (-a\ a\ -a)$ und b_1 bzw. b_2:
   $c = Ab_1 = (-a\ a\ -a) \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = -a + 2a - 3a = -2a$ bzw. $c = Ab_2 = (-a\ a\ -a) \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = -2a$.

   $L_1 = L_2$ ist Lösung von $(-a\ a\ -a)x = -2a,\ a \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, n \geq 1$.

   Alternativ:
   Elimination von λ, μ aus der Darstellung $x = b_1 + \lambda u_1 + \mu v_1$ von L_1 liefert eine Gleichung $-x_1 + x_2 - x_3 = -2$.
   Elimination von λ, μ aus der Darstellung $x = b_2 + \lambda u_2 + \mu v_2$ von $L_2 = L_1$ liefert bis auf einen Faktor dieselbe Gleichung.

P 88. Invers oder gar selbstinvers ?

Gegeben sei eine (2×2)-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $ad - bc \neq 0$

1. Zeigen Sie, dass gilt: $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
2. Bestimmen Sie alle selbstinversen Matrizen aus $\mathbb{R}^{2\times 2}$, d.h. Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $A^{-1} = A$.
3. Bilden die selbstinversen Matrizen bezüglich des Matrizenprodukts eine Gruppe ?

Vgl. auch P81 !

1) Nachrechnen: $A^{-1}\cdot A = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} da-bc & 0 \\ 0 & -cb+ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$

2) $A^{-1} = A \Leftrightarrow$ (1) $a = \frac{d}{ad-bc}$

(2) $b = \frac{-b}{ad-bc} \Leftrightarrow b(ad-bc+1) = 0$

(3) $c = \frac{-c}{ad-bc} \Leftrightarrow c(ad-bc+1) = 0$

$\Rightarrow$ Fallunterscheidung

(4) $d = \frac{a}{ad-bc}$

Fall I: $ad-bc = -1 \wedge b, c \in \mathbb{R}$ Mit (1),(4) $\Rightarrow a = -d \wedge d = -a$ also $bc = 1 - a^2$

Fall I1: $b = 0 \vee c = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow A \in M_0 := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & -a \end{pmatrix} \,\middle|\, a = \pm 1 \wedge b, c \in \mathbb{R} \right\}$

Fall I2: $b \neq 0 \wedge c \neq 0 \Rightarrow c = \frac{1-a^2}{b} \Rightarrow A \in M_1 := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \right\}$

Fall II: $ad - bc \neq -1 \overset{(2)(3)}{\Rightarrow} b = 0 \wedge c = 0 \overset{ad-bc\neq 0}{\Rightarrow} ad \neq 0 \Rightarrow a \neq 0 \wedge d \neq 0$ (*)

Mit (1) $\Rightarrow a = \frac{d}{ad} \overset{(*)}{\Leftrightarrow} a^2 = 1$

Mit (4) $\Rightarrow d = \frac{a}{ad} \overset{(*)}{\Leftrightarrow} d^2 = 1$

$\Rightarrow A \in M_2 := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a, d \in \{-1, +1\} \right\}$

$\Rightarrow A^{-1} = A \Leftrightarrow A \in M_0 \cup M_1 \cup M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & \frac{1-a^2}{b} \\ b & -a \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \right\}$

3) Gegenbeispiel: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist nicht selbstinvers $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Konkretes Beispiel: P 80 !

Z 89. Gegeben sei ein Lineares Gleichungesystem $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, b \in \mathbb{R}^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$.
Wie viele Additionen/Subtraktionen und wieviele Multiplikationen/Divisionen benötigt man maximal, wenn man das System mit dem Gauß-Algorithmus löst? Eventuell nötige Zeilenvertauschungen werden nicht mitgerechnet.

<u>Annahme:</u> $Ax=b$ ist eindeutig lösbar (maximaler Aufwand

<u>Vorwärtsschritt</u> für $(A|b)$ j-ter Schritt

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc|c}
\alpha_{11} & \cdots & & \cdots & & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\
0 & \ddots & & & & & \vdots & \vdots \\
\vdots & \ddots & & \alpha_{jj} & \alpha_{j,j+1} & \cdots & \alpha_{jn} & \beta_j \\ \hline
\vdots & & 0 & \alpha_{j+1,j} & \alpha_{j+1,j+1} & \cdots & \alpha_{j+1,n} & \beta_{j+1} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \alpha_{nj} & \alpha_{n,j+1} & \cdots & \alpha_{nn} & \beta_n
\end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{cccc|ccc|c}
\alpha_{11} & & & & & & \alpha_{1n} & \beta_1 \\
0 & \ddots & & & & & & \\
\vdots & \ddots & & \alpha_{jj} & \alpha_{j,j+1} & \cdots & \alpha_{jn} & \beta_j \\ \hline
\vdots & & 0 & 0 & \alpha^*_{j+1,j+1} & \cdots & \alpha^*_{j+1,n} & \beta^*_{j+1} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha^*_{n,j+1} & \cdots & \alpha^*_{nn} & \beta^*_n
\end{array}\right)$$

Berechne $\ell_k = \frac{\alpha_{kj}}{\alpha_{jj}}$ $\quad j+1 \le k \le n \quad$ $(n-j)$ Mult/Div

Berechne $\alpha^*_{kl} = \alpha_{kl} - \ell_k \alpha_{kj}$ $\quad j+1 \le k \le n \quad \begin{cases} (n-j)^2 & \text{Mult/Div} \\ (n-j)^2 & \text{Add/Sub} \end{cases}$

$\beta^*_k = \beta_k - \ell_k \beta_j$ $\quad j+1 \le k \le n \quad \begin{cases} (n-j) & \text{Mult/Div} \\ (n-j) & \text{Add/Sub} \end{cases}$ $\Rightarrow$ insgesamt.

Mult/Div: $\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} [(n-j)^2 + 2(n-j)] \underset{n-j=k}{=} \sum_{k=1}^{n-1} [k^2+2k] = 2\cdot\sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \overset{\text{Formel-}}{\underset{\text{sammlung}}{=}}$

$\displaystyle = 2\cdot\frac{n(n-1)}{2} + \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{6}n$

Add/Sub: $\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} [(n-j)^2 + (n-j)] \underset{n-j=k}{=} \sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n$

<u>Rückwärtsschritt</u> j-ter Schritt

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c}
\alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1,j-1} & \alpha_{1j} & 0 \cdots & 0 & \beta_1 \\
0 & \ddots & \alpha_{j-1,j-1} & \alpha_{j-1,j} & \vdots & \vdots & \beta_{j-1} \\
\vdots & & \ddots & \alpha_{jj} & & \vdots & \beta_j \\
\vdots & & & \ddots & 1 & \vdots & x_{j+1} \\
0 & \cdots & & \cdots & 0 & 1 & x_n
\end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{ccc|ccc|c}
\alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1,j-1} & 0 & 0 \cdots & 0 & \beta^*_1 \\
0 & \ddots & \alpha_{j-1,j-1} & 0 & \vdots & \vdots & \beta^*_{j-1} \\
\vdots & & \ddots & 1 & 0 & \vdots & x_j \\
\vdots & & & \ddots & 1 & 0 & x_{j+1} \\
0 & \cdots & & \cdots & 0 & 1 & x_n
\end{array}\right)$$

Berechne $x_j = \beta_j / \alpha_{jj}$ $\quad$ 1 Mult/Div

Berechne $\beta^*_k = \beta_k - \alpha_{kj} \cdot x_j$ $\quad 1 \le k \le j-1 \quad \begin{cases} (j-1) & \text{Mult/Div} \\ (j-1) & \text{Add/Sub.} \end{cases}$ $\Rightarrow$ insgesamt

Mult/Div: $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j = \frac{(n+1)n}{2}$; Add/Sub: $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (j-1) \underset{j-1=k}{=} \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{(n-1)n}{2}$

<u>Gesamtbilanz:</u>

Mult/Div: $\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}n$ $\quad$ } macht zusammen

Add/Sub: $\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{6}n$

$\frac{2}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{7}{6}n$ Flops $\Rightarrow$ $\underline{\underline{O(n^3)}}$