Aufgabe 90. Die Matrizen A, B, C und D seien gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ -3 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie (sofern möglich) alle Matrizenprodukte $X \cdot Y$ mit $X, Y \in \{A, B, C, D\}$.

<u>LÖSUNG:</u>

Zu zwei Matrizen $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{p\times q}$ existiert das Matrizenprodukt $A \cdot B \Leftrightarrow n = p$ und es gilt dann

$$A \cdot B = (a_{ij}) \cdot (b_{jk}) = (c_{ik}) = C \in \mathbb{R}^{m\times q} \text{ mit } c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}.$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 33 & 31 & 32 \\ 12 & 12 & 15 \\ 32 & 12 & 30 \end{pmatrix}; \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 20 & 18 \\ 8 & 1 & 9 & 8 \\ 11 & 10 & 26 & 28 \end{pmatrix}; \quad B \cdot B = \begin{pmatrix} 16 & 14 & 4 \\ 6 & 11 & 1 \\ 22 & 18 & 6 \end{pmatrix};$$

$$C \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 11 & 23 & 10 \\ 5 & 7 & 17 & 13 \\ -4 & 23 & 39 & 20 \\ 7 & 19 & 41 & 27 \end{pmatrix}; \quad C \cdot B = \begin{pmatrix} 16 & 15 & 3 \\ 13 & 12 & 3 \\ 30 & 17 & 7 \\ 31 & 26 & 7 \end{pmatrix}; \quad D \cdot C = \begin{pmatrix} 40 & 36 & 38 \\ 13 & 11 & 14 \end{pmatrix};$$

Beachte insbesondere: $A \cdot C \neq C \cdot A$!

H 91. Vertauschbar ?

Zeigen Sie, dass die Menge der mit der (2×2)-Matrix $A=\begin{pmatrix}1&2\\-3&4\end{pmatrix}$ vertauschbaren Matrizen $B\neq\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, d.h. die Menge $M_A=\{B\in\mathbb{R}^{2\times2}\setminus\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\mid A\cdot B=B\cdot A\}$, bezüglich des Matrizenprodukts eine Gruppe bilden.

$B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ ist mit $A=\begin{pmatrix}1&2\\-3&4\end{pmatrix}$ vertauschbar $\Leftrightarrow A\cdot B=B\cdot A$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&2\\-3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2c&b+2d\\-3a+4c&-3b+4d\end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-3b&2a+4b\\c-3d&2c+4d\end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}a+2c&=a-3b \Leftrightarrow 2c=-3b\\ b+2d&=2a+4b \quad (1)\\ -3a+4c&=c-3d \quad (2)\\ -3b+4d&=2c+4d \Leftrightarrow -3b=2c\end{aligned}$$

Bleiben 3 Gleichungen für 4 Unbekannte $\Rightarrow$ Wähle o.E. $\underline{b=2\mu}\Rightarrow\underline{c=-3\mu}$

$(1)\Leftrightarrow 2a-2d=-3b=-6\mu \Leftrightarrow a-d=-3\mu$

$(2)\Leftrightarrow -3a+3d=-3c=9\mu \Leftrightarrow a-d=-3\mu$

$\Big\}$ Wähle o.E. $\underline{a=\lambda}\Rightarrow \underline{d=\lambda+3\mu}$

$\Rightarrow B\in M_A \Leftrightarrow B=\begin{pmatrix}\lambda&2\mu\\-3\mu&\lambda+3\mu\end{pmatrix},\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}\wedge \lambda^2+\mu^2\neq0$

$\uparrow$ $B\neq\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$(M_A,\cdot)$ ist (abelsche) Gruppe, da

(i) abgeschlossen: $\forall B_1,B_2\in M_A:\ A\cdot(B_1B_2)=(A\cdot B_1)\cdot B_2=B_1(A\cdot B_2)=(B_1\cdot B_2)\cdot A$
$\Rightarrow B_1\cdot B_2\in M_A$. ✓

(ii) neutrales Elem: Für $\lambda=1,\mu=0$ gilt $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=E\in M_A$ ✓

(iii) inverses Elem.: Für $B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in M_A$ gilt:

$ad-bc=\lambda(\lambda+3\mu)+2\mu3\mu=\lambda^2+3\lambda\mu+6\mu^2\neq0\quad\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}\wedge\lambda^2+\mu^2\neq0.$

Begründung: $\underline{\mu=0}\Rightarrow\lambda^2=0\Rightarrow\lambda=0$ ↯ zu $\lambda^2+\mu^2\neq0$

$\underline{\mu\neq0}\Rightarrow\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2+3\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)+6=0\Leftrightarrow\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)=\frac12\left(-3\pm\sqrt{9-24}\right)$ ↯ da nicht reell!

Formel aus P 88: $B^{-1}=\frac{1}{\lambda^2+3\lambda\mu+6\mu^2}\begin{pmatrix}\lambda+3\mu&-2\mu\\3\mu&\lambda\end{pmatrix}$ ist das Inverse in $\underline{\mathbb{R}^{2\times2}}$

Bleibt zu zeigen: $B^{-1}\in M_A$!

$A\cdot B^{-1}=B^{-1}A\Leftrightarrow B(AB^{-1})B=B(B^{-1}A)B\Leftrightarrow BAE=EAB\Leftrightarrow BA=AB$ ✓

(iv) assoziativ: wird geerbt, da $\mathbb{R}^{2\times2}$ assoziativ.

Zusatz

(v) kommutativ:

$$\begin{pmatrix}\lambda&2\mu\\-3\mu&\lambda+3\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma&2\tau\\-3\tau&\sigma+3\tau\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\sigma-6\mu\tau&2\lambda\tau+2\mu\sigma+6\mu\tau\\-3\sigma\mu-3\lambda\tau-9\mu\tau&-6\mu\tau+(\lambda+3\mu)(\sigma+3\tau)\end{pmatrix}$$

$\|$ ✓

$$\begin{pmatrix}\sigma&2\tau\\-3\tau&\sigma+3\tau\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda&2\mu\\-3\mu&\lambda+3\mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\sigma-6\mu\tau&2\mu\sigma+2\lambda\tau+6\mu\tau\\-3\lambda\tau-3\mu\sigma-9\mu\tau&-6\mu\tau+(\lambda+3\mu)(\sigma+3\tau)\end{pmatrix}$$

Aufgabe 92. Prüfen Sie, ob folgende Matrizen invertierbar sind:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie gegebenenfalls die zugehörigen inversen Matrizen.

LÖSUNG:

Gegeben ist ein *Körper* $\mathbb{K}$, ein $n \in \mathbb{N}^+$ und eine Matrix $M \in \mathbb{K}^{n\times n}$.
Gesucht ist eine Matrix $M^{-1} \in \mathbb{K}^{n\times n}$, die die Gleichung

$$M \cdot M^{-1} \;=\; E_n$$

erfüllt. Hierbei bezeichne E_n die *Einheitsmatrix* des $\mathbb{K}^{n\times n}$. Wir lösen obige Matrixgleichung jeweils durch *elementare Zeilenumformungen* an der *erweiterten* Matrix $\big(M|E_n\big)$ bis wir $\big(E_n|M^{-1}\big)$ erhalten.
Mit Hilfe der Determinanten von quadratischen Matrizen können wir ein Kriterium für deren Invertierbarkeit angeben:

$$A \in K^{n\times n} \text{ ist invertierbar} \quad \Leftrightarrow \quad det(A) \neq 0$$

a) Es ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $n = 2$ und

$$\begin{aligned}
(A|E_2) \;&=\; \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & i & 1 & 0 \\ i & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) && \begin{array}{l} \\ i\,\mathrm{I} - \mathrm{II} \end{array} \\
&\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & -2 & i & -1 \end{array}\right) && \begin{array}{l} \mathrm{I} + \frac{i}{2}\,\mathrm{II} \\ -\frac{1}{2}\mathrm{II} \end{array} \\
&\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}i & \frac{1}{2} \end{array}\right) = (E_2|A^{-1}) \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \\ -\frac{1}{2}i & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Mit dem Determinanten-Kriterium gilt:
$det(A) = det\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} = 1\cdot 1 - i \cdot i = 1 - i^2 = 1 - (-1) = 2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad A$ ist invertierbar.

Für die Inverse einer invertierbaren $(2\times 2)-$Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gilt: $A^{-1} = \dfrac{1}{det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \Rightarrow$
$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \\ -\frac{1}{2}i & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

b) Jetzt ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n = 3$ und

$$\begin{aligned}
(B|E_3) \;&=\; \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) && \begin{array}{l} \\ 3\,\mathrm{I} - 2\,\mathrm{II} \\ 4\,\mathrm{I} - 2\,\mathrm{III} \end{array} \\
&\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 0 & -2 \end{array}\right) && \begin{array}{l} \\ \\ 2\,\mathrm{II} - \mathrm{III} \end{array} \\
&\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \end{array}\right) && \Rightarrow \quad \text{B ist nicht invertierbar!}
\end{aligned}$$

Mit dem Determinanten-Kriterium gilt (Entwicklung nach Sarrus):

$$det(B) = det\begin{pmatrix}2&3&4\\3&4&5\\4&5&6\end{pmatrix} = 2\cdot4\cdot6+3\cdot5\cdot4+4\cdot3\cdot5-4\cdot4\cdot4-5\cdot5\cdot2-6\cdot3\cdot3 =$$

$= 48+60+60-64-54-50 = 0 \quad \Rightarrow \quad B$ ist nicht invertierbar.

Schneller erhält man das mit Determinantenumformungen:
Subtraktion der 1. Zeile von der 2.Zeile und der 2. Zeile von der 3.Zeile liefert:

$$det(B) = det\begin{pmatrix}2&3&4\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix} = 0, \text{ da die letzten beiden Zeilen linear abhängig sind.}$$

Bemerkung:
Die Determinante einer Matrix ist genau dann Null, wenn ihre Spalten-/Zeilenvektoren linear abhängig sind.
Eine quadratische Matrix ist genau dann invertierbar, wenn ihre Spalten-/Zeilenvektoren linear unabhängig sind.

c) Es ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n = 4$ und

$$(C|E_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc}2&1&0&0&1&0&0&0\\1&4&1&0&0&1&0&0\\0&1&4&1&0&0&1&0\\0&0&1&2&0&0&0&1\end{array}\right)\begin{array}{c}(1)\to(4)\\(2)\to(1)\\(3)\to(2)\\(4)\to(3)\end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc}1&4&1&0&0&1&0&0\\0&1&4&1&0&0&1&0\\0&0&1&2&0&0&0&1\\2&1&0&0&1&0&0&0\end{array}\right)\begin{array}{c}\\\\\\2(1)-(4)\end{array} \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&4&1&0&0&1&0&0\\0&1&4&1&0&0&1&0\\0&0&1&2&0&0&0&1\\0&7&2&0&-1&2&0&0\end{array}\right)\begin{array}{c}\\\\\\7(2)-(4)\end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc}1&4&1&0&0&1&0&0\\0&1&4&1&0&0&1&0\\0&0&1&2&0&0&0&1\\0&0&26&7&1&-2&7&0\end{array}\right)\begin{array}{c}\\\\\\26(3)-(4)\end{array} \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&4&1&0&0&1&0&0\\0&1&4&1&0&0&1&0\\0&0&1&2&0&0&0&1\\0&0&0&45&-1&2&-7&26\end{array}\right)\begin{array}{c}\\(2)-\frac{1}{45}(4)\\(3)-\frac{2}{45}(4)\\\frac{1}{45}(4)\end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc}1&4&1&0&0&1&0&0\\0&1&4&0&\frac{1}{45}&-\frac{2}{45}&\frac{52}{45}&-\frac{26}{45}\\0&0&1&0&\frac{2}{45}&-\frac{4}{45}&\frac{14}{45}&-\frac{7}{45}\\0&0&0&1&-\frac{1}{45}&\frac{2}{45}&-\frac{7}{45}&\frac{26}{45}\end{array}\right)\begin{array}{c}(1)-(3)\\(2)-4(3)\\\\\\\end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc}1&4&0&0&-\frac{2}{45}&\frac{49}{45}&-\frac{14}{45}&\frac{7}{45}\\0&1&0&0&-\frac{7}{45}&\frac{14}{45}&-\frac{4}{45}&\frac{2}{45}\\0&0&1&0&\frac{2}{45}&-\frac{4}{45}&\frac{14}{45}&-\frac{7}{45}\\0&0&0&1&-\frac{1}{45}&\frac{2}{45}&-\frac{7}{45}&\frac{26}{45}\end{array}\right)\begin{array}{c}(1)-4(2)\\\\\\\\\end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&\frac{26}{45}&-\frac{7}{45}&\frac{2}{45}&-\frac{1}{45}\\0&1&0&0&-\frac{7}{45}&\frac{14}{45}&-\frac{4}{45}&\frac{2}{45}\\0&0&1&0&\frac{2}{45}&-\frac{4}{45}&\frac{14}{45}&-\frac{7}{45}\\0&0&0&1&-\frac{1}{45}&\frac{2}{45}&-\frac{7}{45}&\frac{26}{45}\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{45}\begin{pmatrix}26&-7&2&-1\\-7&14&-4&2\\2&-4&14&-7\\-1&2&-7&26\end{pmatrix}$$

Beachte: $A = A^T \Rightarrow A^{-1} = (A^{-1})^T$,
d.h.: C und C^{-1} sind symmetrisch!
Kontrolle bzw. Rechenhilfe!
Beachte auch Symmetrie zur Nebendiagonale.

Bemerkung: Diese Matrix (bzw. eine Verallgemeinerung davon) tritt bei der kubischen Spline-Interpolation auf, bei der durch gegebene Stützpunkte $p_0, ..., p_3$ stückweise definierte kubische Kurven derart gelegt werden, dass an den Stützstellen jeweils die ersten beiden Ableitungen übereinstimmen. Entscheidend dabei ist die Frage, dass die Matrix auch für $N > 3$ invertierbar ist.

Vgl. Applet zu Kubischen Splines auf der Homepage.