TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR.DR. JÜRGEN RICHTER-GEBERT, DR. HERMANN VOGEL

Lineare Algebra und analytische Geometrie 1 & Mathematik für Physiker 1 (WS 2007/08)
— Aufgabenblatt 11 (21. Januar 2008) —

— *Präsenzaufgaben* —

P 86. Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Welche der folgenden Bedingungen sind *hinreichend* dafür, dass das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mindestens eine Lösung $x \in \mathbb{R}^m$ besitzt?

- ☐ $n > m$.
- ☐ Die Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.
- ☐ $n = m$.
- ☐ $n < m$ und $\operatorname{rang}(A) = n$.
- ☐ A ist die Einheitsmatrix.
- ☐ $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A, b)$.
- ☐ Die Zeilenvektoren von A sind linear unabhängig.
- ☐ $b = 0$.

P 87. Gegeben seien die Mengen $L_1 := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \wedge \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$ und

$L_2 := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x = \begin{pmatrix}0\\0\\\alpha\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}1\\\beta\\-1\end{pmatrix} \wedge \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt $L_1 = L_2$?
2. Geben Sie ein nicht-triviales lineares Gleichungssystem $Ax = c$ mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und einem Vektor $c \in \mathbb{R}^n$ an, das $L_1 = L_2$ als Lösung besitzt.

P 88. Invers oder gar selbstinvers ?
Gegeben sei eine (2×2)-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $ad - bc \neq 0$

1. Zeigen Sie, dass gilt: $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
2. Bestimmen Sie alle selbstinversen Matrizen aus $\mathbb{R}^{2\times 2}$, d.h. Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $A^{-1} = A$.
3. Bilden die selbstinversen Matrizen bezüglich des Matrizenprodukts eine Gruppe ?

— *Zentrale Präsenzaufgaben* —

Z 89. Gegeben sei ein Lineares Gleichungesystem $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, b \in \mathbb{R}^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$.
Wie viele Additionen/Subtraktionen und wieviele Multiplikationen/Divisionen benötigt man maximal, wenn man das System mit dem Gauß-Algorithmus löst? Eventuell nötige Zeilenvertauschungen werden nicht mitgerechnet.

— *Hausaufgaben* —

H 90. Die Matrizen A, B, C und D seien gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ -3 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie (sofern möglich) alle Matrizenprodukte $X \cdot Y$ mit $X, Y \in \{A, B, C, D\}$.

H 91. Vertauschbar ?

Zeigen Sie, dass die Menge der mit der (2×2)-Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ vertauschbaren Matrizen $B \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, d.h. die Menge $M_A = \{B \in \mathbb{R}^{2\times 2} \setminus \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid A \cdot B = B \cdot A\}$, bezüglich des Matrizenprodukts eine Gruppe bilden.

H 92. Prüfen Sie, ob folgende Matrizen invertierbar sind:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie gegebenenfalls die zugehörigen inversen Matrizen.

Abgabetermin ist der 04.02.2008 bis 12:00 Uhr (Einwurfkasten im Untergeschoss des FMI-Gebäudes).