P 78. Dimensionsformel für Vektorräume

Gegeben seien zwei Untervektorräume W_1, W_2 eines endlichdimensionalen Vektorraums V über einem Körper K.

Zeigen Sie:

Die Summe der Untervektorräume $W_1 + W_2 := \{v \in V \mid \exists\, v_1 \in W_1, v_2 \in W_2 \;:\; v = v_1 + v_2\}$

ist ein Untervektorraum mit der Dimension $dim(W_1 + W_2) = dim(W_1) + dim(W_2) - dim(W_1 \cap W_2)$.

Die Summe $W_1 + W_2 \subseteq V$ ist ein Untervektorraum von V, da

(i) nicht leer : $0 \in W_1,\ 0 \in W_2 \Rightarrow 0 \in W_1 + W_2$

(ii) +abgeschlossen: $v, w \in W_1 + W_2 \Leftrightarrow \exists\, v_1, w_1 \in W_1 \wedge \exists\, v_2, w_2 \in W_2 :$

$$v = v_1 + v_2 \ \wedge\ w = w_1 + w_2 \Rightarrow v + w = \underbrace{(v_1 + w_1)}_{\in W_1} + \underbrace{(v_2 + w_2)}_{\in W_2} \in W_1 + W_2$$

(iii) $\cdot$ abgeschlossen: $v \in W_1 + W_2,\ \lambda \in K \Rightarrow \exists\, v_1 \in W_1 \wedge \exists\, v_2 \in W_2 :\ v = v_1 + v_2$

$$\Rightarrow \lambda \cdot v = \lambda(v_1 + v_2) = \underbrace{(\lambda v_1)}_{\in W_1} + \underbrace{(\lambda v_2)}_{\in W_2} \in W_1 + W_2$$

Für den Beweis der Dimensionsformel beginnen wir mit einer Basis $(a_1, \dots, a_m)$ des Untervektorraums $W_1 \cap W_2$ und ergänzen sie zu Basen $(a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_k)$ von W_1 und $(a_1, \dots, a_m, c_1, \dots, c_\ell)$ von W_2

Es gilt dann: $dim(W_1 \cap W_2) = m,\ dim(W_1) = m + k,\ dim(W_2) = m + \ell,\ m, k, \ell \in \mathbb{N}$

Die Dimensionsformel ist also bewiesen, wenn wir gezeigt haben, dass $B := (a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_k, c_1, \dots, c_\ell)$ eine Basis von $W_1 + W_2$ ist.

Dass $W_1 + W_2$ von B erzeugt wird ist klar.

Zum Beweis der linearen Unabhängigkeit von B sei

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m + \mu_1 b_1 + \dots + \mu_k b_k + \nu_1 c_1 + \dots + \nu_\ell c_\ell = 0 \quad (*)$$ (Linear-Komb. des Nullvektors)

Betrachten wir $v := \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m + \mu_1 b_1 + \dots + \mu_k b_k$,

so ist $v \in W_1$ und nach $(*)$ $-v = \nu_1 c_1 + \dots + \nu_\ell c_\ell \in W_2$ also $v \in W_1 \cap W_2$!

$\Rightarrow v = \lambda_1' a_1 + \dots + \lambda_m' a_m$ mit $\lambda_1', \dots, \lambda_m' \in K$

Wegen der Eindeutigkeit der Linearkombination von v folgt insbesondere $\mu_1 = \dots = \mu_k = 0$

Setzt man das in $(*)$ ein, so folgt auch

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_m = \nu_1 = \dots = \nu_\ell = 0$$ insgesamt also „B lin. unabh."[1]

da $a_1, \dots, a_m, c_1, \dots, c_\ell$ Basis von W_2 und damit linear unabhängig sind.

<u>Bem</u>: Im Fall $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ nennt man $W_1 + W_2$ <u>direkte Summe</u> $(W_1 \oplus W_2)$

P 79. Dualraum

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K mit $dim(V) = n \in \mathbb{N}$.

$V^* := L[V, K]$ bezeichne die Menge aller linearen Abbildungen von V in K mit den üblichen Verknüpfungen für $f, g \in V^*$ und $\lambda \in K$: $f \oplus g \; : \; x \mapsto f(x) + g(x) \; \forall \, x \in V$ und $\lambda \odot f \; : \; x \mapsto \lambda \cdot f(x) \; \forall \, x \in V$

Ferner betrachte man zu einem Untervektorraum U von V die Menge $U^o := \{f \in V^* \mid f(u) = 0 \; \forall \, u \in U\}$.

Zeigen Sie:

1. $(V^*, \oplus, \odot)$ ist ein Vektorraum über dem Körper K der Dimension n.
   V^* bezeichnet man als Vektorraum der Linearformen oder als Dualraum von V.

2. U^o ist ein Untervektorraum von V^*.
   Bestimmen Sie insbesondere V^o und $[0]^o$, wobei 0 den Nullvektor von V bezeichnet.

3. Für zwei Untervektorräume U_1 und U_2 von V gilt: $U_1^o \cap U_2^o = (U_1 + U_2)^o$

1a) Nach Aufgabe H59 ist Abb(M, K) ein Vektorraum über K

Bleibt zu zeigen: V^* ist Untervektorraum von Abb(V,K) mit UVK:

- nicht leer: Nullvektor von V^* ist die Nullabbildung $\mathcal{O}: x \mapsto 0 \in K \; \forall x \in V$
- $\oplus$ abgeschlossen: Zu zeigen $f, g \in V^* \Rightarrow f \oplus g \in V^*$ dh. ist linear !

$\forall x,y \in V$: $(f \oplus g)(x+y) = f(x+y) + g(x+y) = f(x) + f(y) + g(x) + g(y) =$

$= (f(x) + g(x)) + (f(y) + g(y)) = (f \oplus g)(x) + (f \oplus g)(y)$

$\forall x \in V, \lambda \in K$: $(f \oplus g)(\lambda x) = f(\lambda x) + g(\lambda x) = \lambda \cdot (f(x) + g(x)) = \lambda \cdot (f \oplus g)(x)$

- $\odot$ abgeschlossen: Zu zeigen $f \in V^*, \lambda \in K \Rightarrow \lambda \odot f \in V^*$ dh. ist linear !

$\forall x,y \in V$: $(\lambda \odot f)(x+y) = \lambda \cdot f(x+y) = \lambda \cdot f(x) + \lambda \cdot f(y) = (\lambda \odot f)(x) + (\lambda \odot f)(y)$

$\forall x \in V, \mu \in K$: $(\lambda \odot f)(\mu x) = \lambda \cdot f(\mu x) = \lambda \cdot \mu \cdot f(x) = \mu \cdot \lambda \cdot f(x) = \mu \cdot (\lambda \odot f)(x)$

1b) Wir suchen eine Basis von V^* und zählen die Basisvektoren ab.

Sei $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von V. Dann ist eine lineare Abbildung f eindeutig durch die Bilder von b_j unter f bestimmt, da $f(\underbrace{\sum_{j=1}^n \lambda_j b_j}_{\in V}) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \underbrace{f(b_j)}_{\in K}$.

Betrachte nun für $1 \leq i \leq n$: $f_i : \begin{cases} V \to K \\ b_j \mapsto f_i(b_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases} \end{cases}$

Dann lässt sich jede beliebige lineare Abbildung $f: V \to K$ als Linearkombination der f_i schreiben, da mit $f(b_j) = a_j \in K$ gilt:

$f(b_j) = a_j = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot f_i(b_j) = \sum_{i=1}^n (a_i \odot f_i)(b_j) \Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^n (a_i \odot f_i)(x) \; \forall x \in V$

Bleibt zu zeigen: $(f_1, \dots, f_n)$ sind linear unabhängig

Ansatz: $\sum_{i=1}^n \lambda_i \odot f_i = \mathcal{O}$ Nullabbildung $\Leftrightarrow (\sum_{i=1}^n \lambda_i \odot f_i)(x) = 0 \in V \; \forall x \in V$

(LK von Funktionen)

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot f(x) = 0 \; \forall x \in V$ (LK der Funktionswerte)

$\Rightarrow$ Insbesondere für $x = b_j$: $0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(b_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_j \; \forall 1 \leq j \leq n \Rightarrow$ Beh.

Bem: Analog kann man für K-Vektorräume V, W mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$ zeigen, dass die Menge $L[V, W]$ aller linearen Abbildungen von V in W ein Vektorraum der Dimension $n \cdot m$ ist.

Bem: In Koordinatendarstellung $K^n \cong V$ bzgl. einer Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$ ist V^* die Menge der linearen Abbildungen $f: x \mapsto A \cdot x$ mit $(1 \times n)$-Matrizen $A \in K^{1 \times n} = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in K\}$ (Zeilenvektoren)

also $f: \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\text{Spaltenvektor}} \mapsto \underbrace{(a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{(1\times n)\text{-Matrix} \cdot (n \times 1)\text{-Matrix} = \text{Skalar}} = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$

($f \oplus g$: elementweise Add. von Matrizen
$s \odot f$: elementweise Mult. von Matrizen mit dem Skalar $s \in K$)

2) $U^\circ := \{f \in V^* \mid f(u) = 0 \ \forall u \in U\}$ ist Untervektorraum, da nach UVK

- die Nullabbildung σ in U° enthalten ist $\Rightarrow U^\circ \neq \emptyset$
- $\left.\begin{array}{l} f_1 \in U^\circ \Rightarrow f_1(u) = 0 \ \forall u \in U \\ f_2 \in U^\circ \Rightarrow f_2(u) = 0 \ \forall u \in U \end{array}\right\} \Rightarrow (f_1 \oplus f_2)(u) = f_1(u) + f_2(u) = 0 \ \forall u \in U$
  $\Rightarrow f_1 \oplus f_2 \in U^\circ$, $\oplus$ abgeschlossen
- $\left.\begin{array}{l} f \in U^\circ \Rightarrow f(u) = 0 \ \forall u \in U \\ s \in K \end{array}\right\} \Rightarrow (s \odot f)(u) = s \cdot f(u) = 0 \ \forall u \in U \Rightarrow s \odot f \in U^\circ$
  $\odot$ abgeschlossen

$V^\circ = \{f \in V^* \mid f(v) = 0 \ \forall v \in V\} = \{\sigma\} = \{\text{Nullabbildung}\}$

$[0]^\circ = \{f \in V^* \mid f(\sigma) = 0\} = V^*$

Bem.: Man kann zeigen: $\dim(U) = k \Leftrightarrow \dim(U^\circ) = n - k$.

3) Zu zeigen: (α) $U_1^\circ \cap U_2^\circ \subseteq (U_1 + U_2)^\circ$ und (β) $(U_1 + U_2)^\circ \subseteq U_1^\circ \cap U_2^\circ$

(α) $f \in U_1^\circ \cap U_2^\circ \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f \in U_1^\circ \Rightarrow f(u_1) = 0 \ \forall u_1 \in U_1 \\ f \in U_2^\circ \Rightarrow f(u_2) = 0 \ \forall u_2 \in U_2 \end{array}\right\}$

$\Rightarrow f(u_1) + f(u_2) = f(u_1 + u_2) = 0 \quad \forall u_1 \in U_1, \forall u_2 \in U_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(u) = 0 \quad \forall u = u_1 + u_2 \in U_1 + U_2 \quad \Rightarrow f \in (U_1 + U_2)^\circ$

(β) $f \in (U_1 + U_2)^\circ \Rightarrow f(u) = 0 \quad \forall u \in U_1 + U_2$

$\Rightarrow$ insbesondere wegen $U_1 \subseteq U_1 + U_2$ und $U_2 \subseteq U_1 + U_2$:

$\left\{\begin{array}{l} f(u) = 0 \quad \forall u \in U_1 \Rightarrow f \in U_1^\circ \\ f(u) = 0 \quad \forall u \in U_2 \Rightarrow f \in U_2^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow f \in U_1^\circ \cap U_2^\circ$

Bem: Analog kann man zeigen: $U_1^\circ + U_2^\circ = (U_1 \cap U_2)^\circ$.

P 80. Geometrische Deutung einer linearen Abbildung

Deuten Sie die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x$ der Koordinatenebene $\mathbb{R}^2$ auf sich geometrisch.

Was ergibt sich für $f(f(x))$?

Bestimmen Sie dazu die Fixpunkte $y = x$ und betrachten Sie die Mittelpunkte und Verbindungsgeraden von Punkten x und ihren Bildpunkten y.

__Fixpunkte:__ $y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x \overset{!}{=} x \iff \begin{matrix} x_1 + 2x_2 = x_1 \\ -x_2 = x_2 \end{matrix} \iff x_2 = 0,\ x_1 \in \mathbb{R} \iff x$ liegt auf x_1-Achse

__Mittelpunkte:__ $\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ liegen auf x_1-Achse

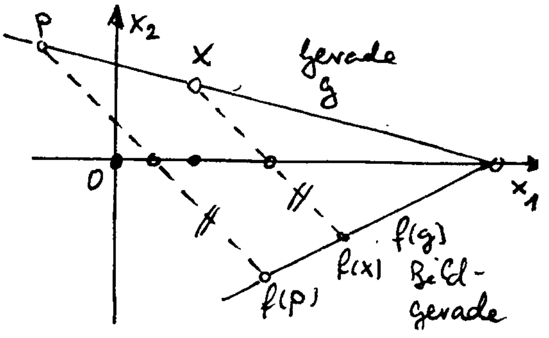
Richtung der Geraden von x nach $y = f(x)$:

$y - x = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_1 \\ -x_2 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ -2x_2 \end{pmatrix} = 2x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ diese Geraden sind parallel zueinander

$\Rightarrow$ Die Abbildung ist eine Affinspiegelung

diese ist involutorisch, d.h. $f(f(x)) = x$ $\quad (A^2 = E\,!)$



P 81. Sei M die Menge der linearen Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit $ad - bc \neq 0$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass M bzgl. der Komposition $\circ$ eine Gruppe ist.

a) __Abgeschlossenheit:__

$f: \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$; $\quad g: \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$f \circ g: \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})x_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})x_2 \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})x_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ und es gilt}$$

$$(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) - (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) =$$

$$= \cancel{a_{11}a_{21}b_{11}b_{12}} + a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21} + \cancel{a_{12}a_{22}b_{21}b_{22}} -$$

$$- \cancel{a_{11}a_{21}b_{11}b_{12}} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} - \cancel{a_{12}a_{22}b_{21}b_{22}} =$$

$$= \underbrace{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}_{\neq 0} \cdot \underbrace{(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})}_{\text{nach Voraussetzung} \neq 0} \neq 0 \quad \Rightarrow f \circ g \in M$$

Allgemein: Matrizenprodukt

mn-Matrix $A=(a_{ik})$ $\quad 1\le i\le m,\ 1\le k\le n$ und

Zeile | Spalte

np-Matrix $B=(b_{kl})$ $\quad 1\le k\le n,\ 1\le l\le p$ heißt

mp-Matrix $C=(c_{il})$ $\quad 1\le i\le m,\ 1\le l\le p$ mit

$(a_{ik})\cdot(b_{kl})=(c_{il})$ und $c_{il}=\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl}$

b) **Neutrales Element:** (Suche $\forall\, A=(a_{ik})$ ein $B=(b_{ik})$ mit $A\circ B=A$)

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Einheitsmatrix E

c) **Inverses Element:** (Suche zu $A=(a_{ik})$ ein $B=(b_{ik})$ mit $A\cdot B=E$)

$$\left(\begin{array}{c|c} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{array}\right) \overset{!}{=} \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$$ spaltenweise 2 LGS !

① $\left.\begin{array}{l} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}=1 \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} (a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})\,b_{11}=a_{22} & \Rightarrow b_{11}=\cdots \text{ s.u.} \\ (a_{21}a_{12}-a_{22}a_{11})\,b_{21}=a_{12} & \Rightarrow b_{21}=\cdots \text{ s.u.} \end{array}\right.$

② $\left.\begin{array}{l} a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}=0 \\ a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} (a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})\,b_{12}=-a_{21} & \Rightarrow b_{12}=\cdots \text{ s.u.} \\ (a_{21}a_{12}-a_{11}a_{22})\,b_{22}=-a_{11} & \Rightarrow b_{22}=\cdots \text{ s.u.} \end{array}\right.$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\underbrace{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}_{\neq 0 \text{ nach Voraussetzung !}}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$ inverse Matrix zu $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

d) **Assoziativität:** (gilt bei Komposition von Abbildungen !)

$$[(a_{ik})(b_{kl})]\cdot(c_{lr}) = \Big(\sum_{k=1}^{2} a_{ik}b_{kl}\Big)\cdot(c_{lr}) = \Big(\sum_{l=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}(a_{ik}\cdot b_{kl})\cdot c_{lr}\Big) =$$

$$= \Big(\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2} a_{ik}\cdot(b_{kl}\cdot c_{lr})\Big) = (a_{ik})\cdot\Big(\sum_{l=1}^{2} b_{kl}\cdot c_{lr}\Big) = (a_{ik})\cdot[(b_{kl})(c_{lr})]$$

e) Das Matrizenprodukt ist i.a. nicht kommutativ !

z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

aber $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 82. Rundungs-Probleme.
Bestimmen Sie die eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystem $Ax = b_\varepsilon$, $x \in \mathbb{R}^4$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 7 & 9 \\ 4 & 5 & 10 & 7 \\ 10 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_\varepsilon = \begin{pmatrix} 15+\varepsilon \\ 15+\varepsilon \\ 26+\varepsilon \\ 15+\varepsilon \end{pmatrix}$$

Was fällt auf, wenn sie die Fälle $\varepsilon = 0$, $\varepsilon = \frac{1}{10}$ und $\varepsilon = 1$ betrachten?

LÖSUNG:

Um das Gleichungssystem zu lösen, verwenden wir den Gauß-Algorithmus. Dabei bringen wir die Matrix $(A|b_\varepsilon)$ mittels geeigneter Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform.

$$(A|b_\varepsilon) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 10 & 5 & -1 & 15+\varepsilon \\ 0 & -1 & 7 & 9 & 15+\varepsilon \\ 4 & 5 & 10 & 7 & 26+\varepsilon \\ 10 & 1 & 4 & 0 & 15+\varepsilon \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \text{(Elimination von } x_1) \\ (-4)\cdot \mathrm{I} + \mathrm{III} \\ (-10)\cdot \mathrm{I} + \mathrm{IV} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 10 & 5 & -1 & 15+\varepsilon \\ 0 & -1 & 7 & 9 & 15+\varepsilon \\ 0 & -35 & -10 & 11 & -34-3\varepsilon \\ 0 & -99 & -46 & 10 & -135-9\varepsilon \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \text{(Elimination von } x_2) \\ (-35)\cdot \mathrm{II} + \mathrm{III} \\ (-99)\cdot \mathrm{II} + \mathrm{IV} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 10 & 5 & -1 & 15+\varepsilon \\ 0 & -1 & 7 & 9 & 15+\varepsilon \\ 0 & 0 & -255 & -304 & -559-38\,\varepsilon \\ 0 & 0 & -739 & -881 & -1620-108\,\varepsilon \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \text{(Elimination von } x_3) \\ (-\frac{739}{255})\cdot \mathrm{III} + \mathrm{IV} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 10 & 5 & -1 & 15+\varepsilon \\ 0 & -1 & 7 & 9 & 15+\varepsilon \\ 0 & 0 & -255 & -304 & -559-38\,\varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{255} & \frac{1}{255}+\frac{542}{255}\,\varepsilon \end{array}\right)$$

Rückwärtiges Auflösen: Mit $x_4 = 1 + 542\,\varepsilon$
$\Rightarrow x_3 = [-559 - 38\,\varepsilon + 304(1 + 542\,\varepsilon)]/(-255) = 1 - 646\,\varepsilon$
$\Rightarrow x_2 = -15 - \varepsilon + 7(1 - 646\,\varepsilon) + 8(1 + 542\,\varepsilon) = 1 + 355\,\varepsilon$
$\Rightarrow x_1 = 15 + \varepsilon - 10(1 + 355\,\varepsilon) - 5(1 - 646\,\varepsilon) + 1 + 542\,\varepsilon = 1 + 223\,\varepsilon$

also die Lösung $x_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1+223\,\varepsilon \\ 1+355\,\varepsilon \\ 1-646\,\varepsilon \\ 1+542\,\varepsilon \end{pmatrix}$ und damit $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. $x_{0.1} = \begin{pmatrix} 23.3 \\ 36.5 \\ -63.6 \\ 55.2 \end{pmatrix}$ bzw. $x_1 = \begin{pmatrix} 224 \\ 356 \\ -645 \\ 543 \end{pmatrix}$.

Es fallen nun gleich zwei Sachen auf:
1.) Die Lösung ist sehr stark von ε und damit von der rechten Seite des Gleichungssystems abhängig. Das kann zu erheblichen Problemen führen, wenn z.B. die rechte Seite Meßdaten (und damit ungenaue Daten) sind.
2.) Im unserem letzten Rechen-Schritt taucht $\frac{1}{255} \approx 0.0039$ auf. Bei Rechnen mit zwei Nachkommastellen wäre das Gleichungssystem auf einmal nicht mehr lösbar. Das zeigt, dass der Gauß-Algorithmus gegenüber solchen Rundungsproblemen sehr anfällig ist.
Betrachte auch $\begin{pmatrix} 1 & 1-10^{-16} \\ 1+10^{-16} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 10^{-16} \\ 10^{-16} \end{pmatrix}$ unter Verwendung von 16 Nachkommastellen und vergleiche das erhaltene Ergebnis jeweils mit der exakten Lösung.