Aufgabe 83. Berechnen Sie abhängig von $\alpha \in \mathbb{R}$ die Dimension $dim(f(\mathbb{R}^4))$ und die Dimension $dim(Kern(f))$ sowie je eine Basis von $f(\mathbb{R}^4)$ und $Kern(f)$ der linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ x \mapsto Ax$ mit der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 & 2\alpha \\ -1 & 3 & \alpha - 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -\alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

LÖSUNG:

Bestimmung von $Kern(A) = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = 0\}$
Mittels elementarer Zeilentransformationen gelangt man auf Zeilenstufenform von:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 & 2\alpha \\ -1 & 3 & \alpha - 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -\alpha \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \alpha I - II \\ I + III \\ 2I - IV \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -2\alpha \\ 0 & 4 & \alpha & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{matrix} II \leftrightarrow III \\ III \leftrightarrow II \end{matrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -2\alpha \\ 0 & 2 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ II - III - 2IV \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -2\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: B.$$

Fall $\alpha = 0$: Zur Bestimmung von $Kern(A)$ bleiben 2 (wesentliche) Gleichungen für 4 Unbekannte von $x \in \mathbb{R}^4$ übrig, d.h. der Zeilenrang ist 2 (= Spaltenrang) also $rg(A) = rg(B) = 2$ und wir können o.E. x_3 und x_4 als freie Parameter wählen:

$$Kern(A) = Kern(B) = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid Bx = 0\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_3 = \lambda, x_4 = \mu, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \wedge x_2 = 0 \wedge x_1 = -\lambda\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} \quad \Rightarrow \quad \{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$ ist eine Basis von

$Kern(A)$ und $dim(Kern(A)) = 2$.
Beachte: $dim(Kern(A)) + dim(A(\mathbb{R}^4)) = dim(\mathbb{R}^4) \quad \Rightarrow \quad dim(A(\mathbb{R}^4)) = rg(A) = 2$ und die beiden ersten Spalten von A bilden eine Basis von $A(\mathbb{R}^4)$.

Beachte: $Ax = 0$ ist eine Linearkombination des Nullvektors mit den Spaltenvektoren von A. Wählt man $x_3 = x_4 = 0$, so erhält man eine Linearkombination der ersten beiden Spaltenvektoren und aus der Berechnung des Kerns, dass diese linear unabhängig sind.

Fall $\alpha \neq 0$: Zur Bestimmung von $Kern(A)$ bleiben 3 (wesentliche) Gleichungen für 4 Unbekannte von $x \in \mathbb{R}^4$ übrig, d.h. der Zeilenrang ist 3 (= Spaltenrang) also $rg(A) = rg(B) = 3$ und wir können o.E. x_4 als freien Parameter wählen:

$$Kern(A) = Kern(B) = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid Bx = 0\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -2\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_4 = \lambda \in \mathbb{R} \ \wedge \ x_3 = 2\lambda \ \wedge \ x_2 = -\tfrac{1}{4}\alpha x_3 = -\lambda\tfrac{\alpha}{2} \ \wedge \ x_1 = -x_2 - x_3 = \lambda(\tfrac{\alpha}{2} - 2) \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x = \lambda \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2} - 2 \\ -\frac{\alpha}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x = \lambda \begin{pmatrix} \alpha - 4 \\ -\alpha \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \lambda \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} \alpha - 4 \\ -\alpha \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

ist eine Basis von $Kern(A)$ und $dim(Kern(A)) = 1$.
Beachte: $dim(Kern(A)) + dim(A(\mathbb{R}^4)) = dim(\mathbb{R}^4) \quad \Rightarrow \quad dim(A(\mathbb{R}^4)) = rg(A) = 3$ und die ersten drei Spalten von A bilden eine Basis von $A(\mathbb{R}^4)$; Begründung anlaog zum obigem Fall.

Aufgabe 84. Gegeben seien die linearen Gleichungssysteme

$$\text{a)} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)} \quad \begin{pmatrix} 2+i & i & 1 \\ 1 & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit $x_1, \ldots, x_5 \in \mathbb{R}$ und $y_1, \ldots, y_3 \in \mathbb{C}$. Geben Sie die Lösungsmengen der obigen Gleichungssysteme an.

<u>LÖSUNG:</u>

Zu gegebenem *linearen Gleichungssystem* der Gestalt $A \cdot x = b$ mit $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$ und $b \in \mathbb{K}^n$ finden wir alle Lösungen $x \in \mathbb{K}^m$ z.B. durch *elementare Zeilenumformungen* der zusamengesetzten Matrix $(A|b)$ auf *Zeilenstufenform*.

a) Wir geben alternativ zwei Lösungswege an: Der erste Lösungsweg entspricht dem üblichen Weg, eine Matrix auf Zeilenstufenform (und zusätzlich in echte Diagonalform) zu bringen. Dazu werden 9 Matrizenumformungen benötigt.

   Dass dies auch mit weniger Umformungen möglich ist, zeigt der zweite Lösungsweg.

   Da aber der "kürzeste" (was heißt das überhaupt?) Lösungsweg alles andere als offensichtlich ist, , haben wir an dieser Stelle beide Lösungswege aufgeführt.

   Bemerkung: Im ersten Lösungsweg schreiben wir die Angabe der vorgenommenen Umformung jeweils hinter die Zeile, in der sie tatsächlich vorgenommen wird. Im zweiten Lösungsweg schreiben wir die im nächsten Schritt vorzunehmende Umformung bereits hinter die aktuelle Matrix. Beides sind Möglichkeiten zur Kennzeichnung von Matrizenumformungen. Entscheiden Sie, welche Ihnen besser gefällt, aber bitte kennzeichnen Sie Ihre Umformungen jeweils in Ihrem eigenen Interesse.

   1. Weg: Es ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{4\times 5}$.

   Vorwärtsschritt:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & -5 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \\ \text{IV} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -4 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} - \text{I} \\ \text{III} - 2 \cdot \text{I} \\ \text{IV} + \text{I} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -4 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{IV} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} - 2\cdot\mathrm{II} \\ \mathrm{IV} - \mathrm{II} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ -\frac{1}{5}\cdot\mathrm{III} \\ \mathrm{IV} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{IV} + 3\cdot\mathrm{III} \end{array}$$

Rückwärtsschritt

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \\ -\frac{1}{4}\cdot\mathrm{IV} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{I} - \mathrm{IV} \\ \mathrm{II} + 3\cdot\mathrm{IV} \\ \mathrm{III} + \mathrm{IV} \\ \mathrm{IV} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} - \mathrm{III} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{IV} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{I} + \mathrm{II} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{IV} \end{array} \qquad \Rightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ \lambda \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. Weg: Es ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{4\times 5}$ und

$$(A|b) = \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & -5 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{I} + \mathrm{IV} \\ \mathrm{II} + \mathrm{IV} \\ \mathrm{III} + 2\,\mathrm{IV} \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrrr|r} 0 & 1 & 0 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -5 & -5 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & -11 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & -5 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 3\,\mathrm{I} - \mathrm{II} \\ 3\,\mathrm{I} - \mathrm{III} \\ 2\,\mathrm{I} - \mathrm{IV} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 5 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \mathrm{I} - 2\,\mathrm{II} \\ \\ 3\,\mathrm{II} - \mathrm{III} \\ 2\,\mathrm{II} - \mathrm{IV} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -20 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -11 & -3 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \\ \\ \frac{1}{-20}\,\mathrm{III} \\ \frac{11}{-20}\,\mathrm{III} - \mathrm{IV} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) .$$

Vertauschen wir in letzter Matrix die Zeilen zyklisch, so erhalten wir die Zeilenstufenform

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) ,$$

und daraus $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, $x_3 = \lambda \in \mathbb{R}$, $x_4 = -1$ und $x_5 = 0$, also

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ \lambda \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad \lambda \in \mathbb{R} .$$

Beachte: Die Zeilenstufenform liefert 4 (wesentliche) Gleichungen für 5 Unbekannte. Daher ist $Rg(A) = 4$ und $Dim(\mathbb{R}^5) - Rg(A) = 1$ also eine Unbekannte (hier x_3) als freier Parameter wählbar.

b) Hier ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $A \in \mathbb{C}^{2\times 3}$ und $(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2+i & i & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -i & 1 \end{array}\right)$

Wegen $a_{21} = 1$ ist es sinnvoll (und zulässig!), die beiden Zeilen zu vertauschen:

$$(A|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -i & 1 \\ 2+i & i & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad (2+i)\,\mathrm{I} - \mathrm{II}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -i & 1 \\ 0 & -i & -2i & 1+i \end{array}\right) \qquad (-i)\,\mathrm{II}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1+i \end{array}\right)$$

Daraus lesen wir $1 \cdot x_1 + (-i) \cdot x_3 = 1$ und $1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = -1 + i$,
also $x_1 = 1 + ix_3$ und $x_2 = -1 + i - 2x_3$ mit frei wählbarem Parameter $x_3 = \mu \in \mathbb{C}$ ab.
Die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ lautet dann

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + i\mu \\ -1 + i - 2\mu \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 + i \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} i \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} , \qquad \mu \in \mathbb{C} .$$

Beachte: Die Zeilenstufenform liefert 2 (wesentliche) Gleichungen für 3 Unbekannte. Daher ist $Rg(A) = 2$ und $Dim(\mathbb{C}^3) - Rg(A) = 1$ also eine Unbekannte (hier x_3) als freier Parameter wählbar.

Aufgabe 85. Matrizenrechnung.
Es seien $A, B, C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ drei reelle (3×3)-Matrizen. Es gelte $A \cdot B = C$. Ersetzen Sie in der folgenden Gleichung die Variablen durch Zahlen:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 2 & 3 \\ a_{21} & 1 & 3 \\ a_{31} & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & b_{12} & 1 \\ 0 & b_{22} & 2 \\ 0 & b_{32} & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & c_{13} \\ 4 & -3 & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix}.$$

<u>LÖSUNG:</u>

Gegeben ist die Matrixgleichung

$$A \cdot B = C \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & 2 & 2 \\ a_{21} & 1 & 3 \\ a_{31} & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & b_{12} & 1 \\ 0 & b_{22} & 2 \\ 0 & b_{32} & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & c_{13} \\ 4 & -3 & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Wir multiplizieren das Matrixprodukt $A \cdot B$ aus und erhalten die zu (1) äquivalente Gleichung

$$\begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{11}b_{12} + 2b_{22} + 3b_{32} & 10 + a_{11} \\ 2a_{21} & a_{21}b_{12} + b_{22} + 3b_{32} & 8 + a_{21} \\ 2a_{31} & a_{31}b_{12} - b_{22} - 2b_{32} & -6 + a_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & c_{13} \\ 4 & -3 & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix}.$$

Koeffizientenvergleich liefert das zu (1) äquivalente, *nicht-lineare* Gleichungssystem

$$\begin{array}{llll} \text{(I)} & 2a_{11} = 2\,, & \text{(IV)} & a_{11} \cdot b_{12} + 2b_{22} + 3b_{32} = -3\,, & \text{(VII)} & 10 + a_{11} = c_{13}\,, \\ \text{(II)} & 2a_{21} = 4\,, & \text{(V)} & a_{21} \cdot b_{12} + b_{22} + 3b_{32} = -3\,, & \text{(VIII)} & 8 + a_{21} = c_{23}\,, \\ \text{(III)} & 2a_{31} = 0\,, & \text{(VI)} & a_{31} \cdot b_{12} - b_{22} - 2b_{32} = 0\,, & \text{(IX)} & -6 + a_{31} = c_{33}\,, \end{array}$$

in den 9 Unbekannten $a_{11}, a_{21}, a_{31}, b_{12}, b_{22}, b_{32}, c_{13}, c_{23}, c_{33}$.
Aus (I), (II) und (III) erhält man unmittelbar $a_{11} = 1\,,\ a_{21} = 2$ und $a_{31} = 0$.
Einsetzen in (VII), (VIII) und (IX) liefert $c_{13} = 11\,,\ c_{23} = 10$ und $c_{33} = -6$.
Setzt man $a_{11} = 1,\ a_{21} = 2,\ a_{31} = 0$ wiederum in (IV), (V) und (IX) ein, erhält man folgendes *lineares* Gleichungssystem in b_{12}, b_{22}, b_{32}

$$\begin{array}{ll} \text{(IV)}^* & b_{12} + 2b_{22} + 3b_{32} = -3\,, \\ \text{(V)}^* & 2b_{12} + b_{22} + 3b_{32} = -3\,, \\ \text{(VI)}^* & \quad - b_{22} - 2b_{32} = 0\,, \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rl} & \text{(IV)}^{**} \quad b_{12} + 2b_{22} + 3b_{32} = -3\,, \\ -2\cdot\text{(IV)}^* + \text{(V)}^* = & \text{(V)}^{**} \quad - 3b_{22} - 3b_{32} = 3\,, \\ -1\cdot\text{(VI)}^* = & \text{(VI)}^{**} \quad b_{22} + 2b_{32} = 0\,, \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{rl} \text{(IV)}^{***} & b_{12} + 2b_{22} + 3b_{32} = -3\,, \\ \frac{-1}{3}\text{(V)}^{**} = \text{(V)}^{***} & b_{22} + b_{32} = -1\,, \\ \frac{1}{3}\text{(V)}^{**} + \text{(VI)}^{**} = \text{(VI)}^{***} & b_{32} = 1\,, \end{array} \Leftrightarrow \ b_{32} = 1, b_{22} = -2 \text{ und } b_{12} = -2$$

In Matrixschreibweise mit den selben Zeilenumformungen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{array}{c} b_{12} = -2, \\ b_{22} = -2, \\ b_{32} = 1. \end{array}$$

Die Lösungen der Matrixgleichung (1) lauten also

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 11 \\ 4 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$