TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR.DR. JÜRGEN RICHTER-GEBERT, DR. HERMANN VOGEL

Lineare Algebra und analytische Geometrie 1 & Mathematik für Physiker 1 (WS 2007/08)
— Aufgabenblatt 10 (14. Januar 2008) —

— Präsenzaufgaben —

P 78. Dimensionsformel für Vektorräume
Gegeben seien zwei Untervektorräume W_1, W_2 eines endlichdimensionalen Vektorraums V über einem Körper K.
Zeigen Sie:
Die Summe der Untervektorräume $W_1 + W_2 := \{v \in V | \exists\, v_1 \in W_1, v_2 \in W_2 \ : \ v = v_1 + v_2\}$
ist ein Untervektorraum mit der Dimension $dim(W_1 + W_2) = dim(W_1) + dim(W_2) - dim(W_1 \cap W_2)$.

P 79. Dualraum
Sei V ein Vektorraum über einem Körper K mit $dim(V) = n \in \mathbb{N}$.
$V^* := L[V, K]$ bezeichne die Menge aller linearen Abbildungen von V in K mit den üblichen Verknüpfungen für $f, g \in V^*$ und $\lambda \in K$: $\quad f \oplus g \ : \ x \mapsto f(x) + g(x) \,\forall\, x \in V \quad$ und $\quad \lambda \odot f \ : \ x \mapsto \lambda \cdot f(x) \,\forall\, x \in V$
Ferner betrachte man zu einem Untervektorraum U von V die Menge $U^o := \{f \in V^* \mid f(u) = 0 \,\forall\, u \in U\}$.
Zeigen Sie:

1. $(V^*, \oplus, \odot)$ ist ein Vektorraum über dem Körper K der Dimension n.
   V^* bezeichnet man als Vektorraum der Linearformen oder als Dualraum von V.
2. U^o ist ein Untervektorraum von V^*.
   Bestimmen Sie insbesondere V^o und $[0]^o$, wobei 0 den Nullvektor von V bezeichnet.
3. Für zwei Untervektorräume U_1 und U_2 von V gilt: $\quad U_1^o \cap U_2^o = (U_1 + U_2)^o$.

P 80. Geometrische Deutung einer linearen Abbildung
Deuten Sie die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x$ der Koordinatenebene $\mathbb{R}^2$ auf sich geometrisch.
Was ergibt sich für $f(f(x))$?
Bestimmen Sie dazu die Fixpunkte $y = x$ und betrachten Sie die Mittelpunkte und Verbindungsgeraden von Punkten x und ihren Bildpunkten y.

P 81. Sei M die Menge der linearen Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
mit $ad - bc \neq 0$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass M bzgl. der Komposition $\circ$ eine Gruppe ist.

— Zentrale Präsenzaufgaben —

Z 82. Rundungs-Probleme.
Bestimmen Sie die eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystem $Ax = b_\varepsilon$, $x \in \mathbb{R}^4$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 7 & 9 \\ 4 & 5 & 10 & 7 \\ 10 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_\varepsilon = \begin{pmatrix} 15+\varepsilon \\ 15+\varepsilon \\ 26+\varepsilon \\ 15+\varepsilon \end{pmatrix}$$

Was fällt auf, wenn sie die Fälle $\varepsilon = 0$, $\varepsilon = \frac{1}{10}$ und $\varepsilon = 1$ betrachten?

— Hausaufgaben —

H 83. Berechnen Sie abhängig von $\alpha \in \mathbb{R}$ die Dimension $dim(f(\mathbb{R}^4))$ und die Dimension $dim(Kern(f))$ sowie je eine Basis von $f(\mathbb{R}^4)$ und $Kern(f)$ der linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ x \mapsto Ax$ mit der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 & 2\alpha \\ -1 & 3 & \alpha-1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -\alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

H 84. Gegeben seien die linearen Gleichungssysteme

$$\text{a)} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)} \quad \begin{pmatrix} 2+i & i & 1 \\ 1 & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit $x_1, \ldots, x_5 \in \mathbb{R}$ und $y_1, \ldots, y_3 \in \mathbb{C}$. Geben Sie die Lösungsmengen der obigen Gleichungssysteme an.

H 85. Matrizenrechnung.
Es seien $A, B, C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ drei reelle (3×3)-Matrizen. Es gelte $A \cdot B = C$. Ersetzen Sie in der folgenden Gleichung die Variablen durch Zahlen:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 2 & 3 \\ a_{21} & 1 & 3 \\ a_{31} & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & b_{12} & 1 \\ 0 & b_{22} & 2 \\ 0 & b_{32} & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & c_{13} \\ 4 & -3 & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix}.$$

Abgabetermin ist der 28.01.2008 bis 12:00 Uhr (Einwurfkasten im Untergeschoss des FMI-Gebäudes).

Informationen zur Prüfungsanmeldung und Hilfsmittel

- Die Prüfung zu dieser Vorlesung findet am Montag, den 18. Februar 2008, von 13:15 - 14:45 Uhr in den Räumen MW 0001, MW 2001, MW 1801, MW 0350 und MI HS 1 statt.
- Um die Organisation der Prüfung zu erleichtern, bitten wir Sie, sich bis 11. Februar 2008 unter http://www-m10.ma.tum.de/m10/anmeldung.php zur Prüfung anzumelden. Bitte geben Sie dabei Ihre Fachrichtung an.
  Die Raumverteilung wird ab 13. Februar auf der Linearen-Algebra-Homepage bekannt gegeben.
  Ihre Anmeldung wird ausschließlich für die Platzverteilung verwendet.
- Zulässige Hilfsmittel sind neben Schreibzeug **ein selbst erstelltes Din A4 Blatt (beidseitig)**.
  Insbesondere sind **weder** Bücher, Skripten, Taschenrechner, Handies **noch** Laptops erlaubt.