Aufgabe 70. Welche der folgenden Abbildungen sind nicht linear ?

☐ $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) := 3 \cdot x_2 - 2 \cdot x_1$

☐ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $x \mapsto f(x) := (x + 1, x - 1)$

☐ $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) := (x_2, 0)$

☐ $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) := (x_1 \cdot x_2, x_1 + x_2)$

<u>LÖSUNG:</u>

Eine Abbildung $f : V \to W$ zwischen zwei Vektorräumen $(V, +, \cdot)$ und $(W, \oplus, \odot)$ über **demselben** Körper K heißt linear $\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in V$ und $\forall \lambda \in K :$ $f(x + y) = f(x) \oplus f(y)$ und $f(\lambda \cdot x) = \lambda \odot f(x)$.

☐ $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) := 3 \cdot x_2 - 2 \cdot x_1$ ist linear,

da $f((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) = f(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = 3 \cdot (x_2 + y_2) - 2 \cdot (x_1 + y_1)$

$$= (3 \cdot x_2 - 2 \cdot x_1) + (3 \cdot y_2 - 2 \cdot y_1) = f(x_1, x_2) + f(y_1, y_2)$$

und da $f(\alpha \cdot (x_1, x_2)) = f(\alpha x_1, \alpha x_2) = 3 \cdot \alpha x_2 - 2 \cdot \alpha x_1 = \alpha \cdot (3 \cdot x_2 - 2 \cdot x_1) = \alpha \cdot f(x_1, x_2)$

☒ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $x \mapsto f(x) := (x + 1, x - 1)$ ist nicht linear,

da $0 \mapsto f(0) = (1, -1) \neq (0, 0) = 0 \cdot f(0)$

Beachte: Mit $\lambda = 0 \in K$ folgt bei linearen Abbildungen für $0 \in V : f(0) = f(0 \cdot x) = 0 \cdot f(x) = 0 \in W$

☐ $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) := (x_2, 0)$ ist linear

da $f((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) = f(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (x_2 + y_2, 0) = (x_2, 0) + (y_2, 0) = f(x_1, x_2) + f(y_1, y_2)$

und da $f(\alpha \cdot (x_1, x_2)) = f(\alpha x_1, \alpha x_2) = (\alpha x_2, 0) = \alpha \cdot (x_2, 0) = \alpha \cdot f(x_1, x_2)$

☒ $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) := (x_1 \cdot x_2, x_1 + x_2)$ ist nicht linear

da $f(2 \cdot (1, 1)) = f(2, 2) = (2 \cdot 2, 2 + 2) = (4, 4) \neq (2, 4) = 2 \cdot (1, 2) = 2 \cdot (1 \cdot 1, 1 + 1) = 2 \cdot f(1, 1)$

Aufgabe 71. Seien V und W zwei endlichdimensionale K-Vektorräume über demselben Körper K. Zeigen Sie:

1. Ist $\mathcal{B} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ eine Basis von V, so ist die Koordinatenabbildung
$$\psi : V \to K^n \qquad \text{mit} \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot b_i \mapsto \psi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot b_i\right) := (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$$
ein (wohldefinierter) Vektorraumisomorphismus.

2. Zu V und W existiert genau dann ein K-Vektorraumisomorphismus $\varphi : V \to W$, wenn $dim_K V = dim_K W$.

LÖSUNG:

1. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass sich jedes $v \in V$ eindeutig aus den Basisvektoren b_1 bis b_n linear kombinieren lässt,d.h: $\exists_1 \quad \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in K : v = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$. Damit ist ψ wohldefiniert.

   Wir zeigen, dass ψ eine bijektive lineare Abbildung (d.h. strukturerhaltend) ist.

   Surjektivität: Zu $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in K^n$ wähle $v := \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot b_i \quad \Rightarrow \quad \psi(v) = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$

   Injektivität: $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n) \quad \Rightarrow \quad \lambda_i = \mu_i \ (\forall i) \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot b_i = \sum_{i=1}^n \mu_i \cdot b_i$

   Linearität: Seien $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot b_i \in V$ und $y = \sum_{i=1}^n \mu_i \cdot b_i \in V$ sowie $\alpha \in K$ beliebig.

   $$\begin{aligned}\psi(\alpha \cdot (x+y)) &= \psi\left(\sum_{i=1}^n \alpha \cdot (\lambda_i + \mu_i) \cdot b_i\right) = (\alpha \cdot (\lambda_1 + \mu_1), \alpha \cdot (\lambda_2 + \mu_2), ..., \alpha \cdot (\lambda_n + \mu_n)) \\ &= \alpha \cdot [(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) + (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n)] = \alpha \cdot [\psi(x) + \psi(y)]\end{aligned}$$

2. Zu zeigen ist: $V \cong W \quad \Leftrightarrow \quad dim_K V = dim_K W$

„$\Rightarrow$“: Sei $\varphi : V \to W$ ein Vektorraumisomorphismus.

Wir zeigen: $\varphi(\mathcal{B}) = (\varphi(b_1), \varphi(b_2), ..., \varphi(b_n))$ ist eine Basis von W. ($\Rightarrow dim_K V = dim_K W$):

Erzeugendensystem:

Sei $w \in W$ beliebig $\Rightarrow \exists v \in V : \varphi(v) = w$, da φ als Isomorphismus surjektiv ist

$\mathcal{B} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ ist Erzeugendensystem von $V \Rightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in K : v = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$.

$\Rightarrow w = \varphi(v) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(b_i)$, da φ als Vektorraumisomorphismus linear ist.

Lineare Unabhängigkeit:

Seien $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in K$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(b_i) = 0 \quad \overset{\varphi \text{ linear}}{\Rightarrow} \quad \varphi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i\right) = 0 = \varphi(0)$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i = 0$, da φ injektiv ist.

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$, da $(b_1, b_2, ..., b_n)$ linear unabhängig ist.

alternativ mit Dimensionssatz: $dim_K V = dim_K(Kern(\varphi)) + dim_K(Bild(\varphi))$

mit $Kern(\varphi) = \{0\}$, da φ injektiv ist, und $Bild(\varphi) = W$, da φ surjektiv ist.

„$\Leftarrow$“: Seien $\psi_1 : V \to K^n$ und $\psi_2 : W \to K^m$ Koordinatenabbildungen bzgl. irgendwelcher Basen - also Vektorraumisomorphismen zwischen V und K^n bzw. zwischen W und K^m. Nach Voraussetzung gilt $n = m$, also $K^n = K^m$. Suche nun einen Vektorraumisomorphismus $\varphi : V \to W$.

Betrachtet man $\varphi := \psi_2^{-1} \circ \psi_1$, so ist φ bijektiv (Komposition bijektiver Abbildungen) und auch linear, da allgemein gilt: Sind die Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ linear, so ist $g \circ f$ linear und auch f^{-1} linear, sofern f bijektiv ist.

Beweis: (1) $\forall\, x, y \in A, \forall\, \alpha \in K : (g \circ f)(\alpha \cdot (x+y)) = g(f(\alpha \cdot (x+y))) = g(\alpha \cdot (f(x) + f(y))) =$
$= \alpha \cdot [g(f(x)) + g(f(y))] = \alpha \cdot [(g \circ f)(x) + (g \circ f)(y)]$.

(2) $\forall\, u, v \in B, \ \exists\, x, y \in A : f(x) = u, f(y) = v$. Damit gilt $\forall\, \alpha \in K : f^{-1}(\alpha \cdot (u+v)) =$
$f^{-1}(\alpha \cdot (f(x) + f(y))) = f^{-1}(f(\alpha \cdot (x+y))) = \alpha \cdot (x+y)) = \alpha \cdot [f^{-1}(u) + f^{-1}(v)]$.

P 72. Gegeben sei die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ sowie der Vektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

1. Geben Sie eine Basis von $Kern(f)$ und eine Basis von $Bild(f) = f(\mathbb{R}^4)$ an.
2. Geben Sie den Faktorraum $\mathbb{R}^4/Kern(f)$ sowie eine Basis dafür an.
3. Wie lässt sich der Faktorraum und seine Elemente geometrisch deuten?
   Betrachten Sie speziell die Nebenklasse $[v]_{Kern(f)}$ in den Schnitten des $\mathbb{R}^4$ mit $x_1 = 1$ bzw. $x_4 = 0$.
4. Zeigen Sie, dass die Nebenklasse $[v]_{Kern(f)}$ alle Vektoren des $\mathbb{R}^4$ enthält, die durch f auf denselben (Bild-)Vektor $w \in \mathbb{R}^2$ abgebildet werden.

1. $Kern(f) = \{ x \in \mathbb{R}^4 \mid f(x) = 0 \in \mathbb{R}^2 \}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in Kern(f) \Leftrightarrow f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 = -x_1 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{Kern(f)} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2 = 0 \right\} = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} = span\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$\Rightarrow$ <u>Basis von Kern(f)</u> ist $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ <u>$\dim Kern(f) = 2$</u> ($\Rightarrow f$ nicht injektiv)

<u>Geometrische Deutung</u>: $Kern(f)$ ist im $\mathbb{R}^4$ die 2-dim. x_3x_4-Koordinatenebene.

$$\underline{Bild(f) = f(\mathbb{R}^4)} = \{ w \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = w, x \in \mathbb{R}^4 \} = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = span\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Da $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ offenbar linear <u>unabhängig</u> sind, bilden sie eine <u>Basis</u> <u>von $f(\mathbb{R}^4)$</u> $\subseteq \mathbb{R}^2$ mit <u>$\dim f(\mathbb{R}^4) = 2$</u> $= \dim \mathbb{R}^2 \Rightarrow f(\mathbb{R}^4) = \mathbb{R}^2$ ($\Rightarrow f$ ist surjektiv)

vgl. <u>Dimensionsformel</u> für lineare Abbildungen $f : \underline{V} \to W$

$\dim Bild(f) + \dim Kern(f) = \dim \underline{V}$ hier: $2 + 2 = \dim \mathbb{R}^4 = 4$

<u>Bem</u>: Natürlich ist auch $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis von $Bild(f) = f(\mathbb{R}^4)$!

2. $\underline{\mathbb{R}^4/Kern(f)} = \{ [x]_{Kern(f)} \mid x \in \mathbb{R}^4 \}$ mit den Nebenklassen

$$\underline{[x]_{Kern(f)}} = x + Kern(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Für $x, y \in \mathbb{R}^4$: $[x]_{Kern(f)} = [y]_{Kern(f)} \Leftrightarrow x - y \in Kern(f) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \\ x_3 - y_3 \\ x_4 - y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \end{cases}$ (*)

(keine Bedingung an x_3, x_4, y_3, y_4!)

⇒ Nur die 1. und 2. Komponente von y sind für $y \in [x]_{Kern(f)}$ entscheidend

⇒ $\mathbb{R}^4/_{Kern(f)} = \left\{ [x]_{Kern(f)} \;\middle|\; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$ ⇒ $\underline{\dim \mathbb{R}^4/_{Kern(f)} = 2}$ vgl.

Dimensionsformel der Vorl.: $\dim\left(\mathbb{R}^4/_{Kern(f)}\right) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim Kern(f) = 4 - 2 = 2$ ✓

und $\left(\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_{Kern(f)}, \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_{Kern(f)} \right)$ ist eine <u>Basis der $\mathbb{R}^4/_{Kern(f)}$</u>

Nachweis der linearen Unabhängigkeit:

Ansatz: $\sigma \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_{Kern(f)} + \tau \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_{Kern(f)} = \left[\begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_{Kern(f)} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_{Kern(f)} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in Kern(f)$

$\Leftrightarrow \sigma = \tau = 0$

3. <u>Geometrische Deutung:</u>

Für $x \in \mathbb{R}^4$ ist $[x]_{Kern(f)} = x + Kern(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$ im $\mathbb{R}^4$

eine 2dim Ebene durch den (Auf-)Punkt $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ parallel zur x_3x_4-Koordinatenebene. Speziell für $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ gilt im Schnitt des $\mathbb{R}^4$ mit

(a) $x_1 = 1$ („Betrachte 2., 3. und 4. Komponente") $[\tilde{v}]_{Kern(f)} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$

ist die Ebene durch den Punkt $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ parallel zur x_3x_4-Ebene. ($x_2x_3x_4$-Koordinatensystem)

(b) $\overbrace{x_4 = 0}^{\Leftrightarrow\ \mu = -4}$ („Betrachte 1., 2. und 3. Komponente") $[\tilde{\tilde{v}}]_{Kern(f)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

ist die Gerade durch den Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ parallel zur x_3-Achse. ($x_1x_2x_3$-Koordinatensystem)

$\mathbb{R}^4/_{Kern(f)}$ ist die Menge aller 2-dim Ebenen parallel zur x_3x_4 Koordinatenebene.

4. Für $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ gilt: $w = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Die Frage nach allen Vektoren $x \in \mathbb{R}^4$, die auf $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ abgebildet werden, führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2 Gleichungen für 4 Unbekannte ⇒ $x_3 = \lambda$, $x_4 = \mu$ als Parameter frei wählbar und $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$ ⇒ $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \in [v]_{Kern(f)}$.

Z 73. Seien V und W Vektorräume über dem Körper K und die Abbildung $f : V \to W$ linear. Ferner sei $(b_1, b_2, ..., b_n), n \in \mathbb{N}$ eine Basis von V. Zeigen Sie:

1. Die Abbildung f ist genau dann injektiv, wenn $Kern(f) = \{0\}$ ist.
2. Die Abbildung f ist genau dann injektiv, wenn $(f(b_1), f(b_2), ..., f(b_n))$ linear unabhängig in W ist.
3. Die Abbildung f ist genau dann surjektiv, wenn $(f(b_1), f(b_2), ..., f(b_n))$ ein Erzeugendensystem von W ist.
4. Die Abbildung f ist im Fall $V = W$ genau dann injektiv, wenn f surjektiv ist.

Hinweis: Verwenden Sie den Basisaustauschsatz und den Basisergänzungssatz.

Vorbemerkung: Ist f linear $\Rightarrow f(0_V) = 0_W$ mit Nullvektoren 0_V von V und 0_W von W $\Rightarrow \{0_V\} \subseteq Kern(f) := \{x \in V \mid f(x) = 0_W\} \subseteq V$

1. $(\Rightarrow)$ Ist f injektiv: Aus $f(x) = 0_W = f(0_V) \overset{\text{injektiv}}{\Rightarrow} x = 0_V \Rightarrow Kern(f) = \{0_V\}$

$(\Leftarrow)$ Ist $Kern(f) = \{0_V\}$: Seien $x, y \in V$ mit $f(x) = f(y) \Rightarrow f(x) - f(y) = 0_W$ $\overset{\text{linear}}{\Rightarrow} f(x-y) = 0_W \Rightarrow (x-y) \in Kern(f) = \{0_V\} \Rightarrow x - y = 0_V \Rightarrow x = y \Rightarrow f$ injektiv

2. $(\Rightarrow)$ Ist f injektiv, $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis von V und $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot f(b_i) = 0_W$ eine Linearkombination von 0_W mit $\alpha_i \in K$

$$\underbrace{f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i\right) \quad f(0_V)}_{\text{linear}} \overset{\text{injektiv}}{\Rightarrow} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i = 0_V \overset{\text{Basis}}{\Rightarrow} \alpha_i = 0 \ \forall i$$

$\Rightarrow f(b_1), ..., f(b_n)$ sind linear unabhängig.

$(\Leftarrow)$ Sind $f(b_1), ..., f(b_n)$ linear unabhängig und $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis von V

$\forall x, y \in V$ mit $x \neq y$ gibt es Linearkombinationen (eindeutig)

$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i \neq \sum_{i=1}^{n} \beta_i b_i = y$ mit $\alpha_k \neq \beta_k$ für mindestens ein $k \in \{1, ..., n\}$

$$\Rightarrow f(x) - f(y) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i\right) - f\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i b_i\right) \underset{\text{linear}}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(b_i) - \sum_{i=1}^{n} \beta_i f(b_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) f(b_i) \neq 0_W$$ da $\alpha_k - \beta_k \neq 0$ und die $f(b_i)$ linear unabhängig!

$\Rightarrow f(x) \neq f(y) \Rightarrow f$ injektiv

3. $(\Rightarrow)$ Ist f surjektiv und $w \in W \Rightarrow \exists v \in V$ mit $f(v) = w$.

Da $(b_1, ..., b_n)$ Basis von V ist, gilt $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i$ mit gewissen $\alpha_i \in K$

$$\Rightarrow w = f(v) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i\right) \overset{\text{linear}}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(b_i) \in span(f(b_1), ..., f(b_n))$$

$\Rightarrow W \subseteq span(f(b_1), ..., f(b_n)) \subseteq W \Rightarrow$ Gleichheit und Behauptung.

$(\Leftarrow)$ Ist $f(b_1), ..., f(b_n)$ Erzeugendensystem von W und $w \in W \Rightarrow$

Es gibt $\alpha_i \in K$ mit $w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(b_i) \overset{\text{linear}}{=} f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i\right)$

$\Rightarrow$ Wähle $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i \Rightarrow f(v) = w \Rightarrow f$ surjektiv

4. $V = W \Rightarrow \dim V = \dim W = n$ und $(b_1, \dots, b_n)$ ist Basis von V

f injektiv $\overset{2)}{\Leftrightarrow}$ $(f(b_1), \dots, f(b_n))$ sind n linear unabhängige Vektoren in $W = V$ mit $\dim W = n$

$\overset{(*)}{\Leftrightarrow}$ $(f(b_1), \dots, f(b_n))$ bilden eine Basis von $W = V$

$\overset{(**)}{\Leftrightarrow}$ $(f(b_1), \dots, f(b_n))$ ist ein Erzeugendensystem von $W = V$ mit $n = \dim W$ Vektoren

$\overset{3)}{\Leftrightarrow}$ f ist surjektiv

<u>Beweis von $(*)$</u>

($\Leftarrow$) klar

($\Rightarrow$) <u>Annahme</u>: $L = (f(b_1), \dots, f(b_n))$ bilden keine Basis von W, dann könnte man L zu einer Basis von $W = V$ ergänzen, diese hätte aber mehr als n Elemente, $\lightning$ zu $\dim V = n$.

<u>Beweis von $(**)$</u>

($\Rightarrow$) klar

($\Leftarrow$) <u>Annahme</u> $L = (f(b_1), \dots, f(b_n))$ sind linear <u>abhängig</u>

$\Rightarrow$ L enthält nach dem Basisaustauschsatz eine Basis von $W = V$, die weniger als n Elemente hat, $\lightning$ zu $\dim V = n$

<u>Alternativer Beweis von 4.</u> mit Hilfe der <u>Dimensionsformel</u> für lineare Abbildungen $f: V \to W$ (nach Vorlesung)

$\dim \operatorname{Kern}(f) + \dim \operatorname{Bild}(f) = \dim V$, hier $V = W$!

<u>Also</u>: f surjektiv $\Leftrightarrow \operatorname{Bild}(f) = V \Leftrightarrow \dim \operatorname{Bild}(f) = \dim V$

$\Leftrightarrow \dim \operatorname{Kern}(f) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Kern}(f) = \{0_V\} \overset{1)}{\Leftrightarrow} f$ injektiv.

<u>Bemerkung</u>: gegeben lineare Abbildung $f: V \to W$

f injektiv $\Rightarrow \dim V \leq \dim W$

f surjektiv $\Rightarrow \dim V \geq \dim W$