Aufgabe 74. Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Linearität.

1. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $(x, y) \mapsto f(x, y) := (3x + 2y, x)$
2. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := \vartheta x + \zeta$ für feste $\vartheta, \zeta \in \mathbb{R}$
3. $f : \mathbb{Q}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y) \mapsto f(x, y) := x + \sqrt{2}y$ (über $\mathbb{Q}$)
4. $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $z \mapsto \overline{z}$ (über $\mathbb{C}$)
5. $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $z \mapsto \overline{z}$ (über $\mathbb{R}$)
6. $f : Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi \mapsto f(\varphi) := \varphi(1)$

Hinweis: $f : V \to W$ über K bedeutet Abbildung f zwischen den Vektorräumen V und W über demselben Körper K.

LÖSUNG:

1. $\forall\ (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ und $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ gilt:
   $f((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (3 \cdot (x_1 + x_2) + 2 \cdot (y_1 + y_2), x_1 + x_2)$
   $= (3x_1 + 2y_1 + 3x_2 + 2y_2, x_1 + x_2) = (3x_1 + 2y_1, x_1) + (3x_2 + 2y_2, x_2) = f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)$
   $f(\alpha(x, y)) = f(\alpha x, \alpha y) = (3\alpha x + 2\alpha y, \alpha x) = \alpha \cdot (3x + 2y, x) = \alpha \cdot f(x, y)$
   $\Longrightarrow f$ ist linear
2. f ist linear $\Leftrightarrow \zeta = 0$

   „$\Rightarrow$“ f linear $\Rightarrow \zeta = f(0) = 0$ Beachte: Für f linear gilt: $f(0) = f(0 \cdot x) = 0 \cdot f(x) = 0$

   „$\Leftarrow$“ $\forall\ x, y$ aus dem Vektorraum $\mathbb{R}$ und $\forall\ \alpha$ aus dem Körper $\mathbb{R}$ gilt:
   $f(x + y) = \vartheta \cdot (x + y) = \vartheta \cdot x + \vartheta \cdot y = f(x) + f(y)$
   $f(\alpha \cdot x) = \vartheta \cdot \alpha \cdot x = \alpha \cdot f(x)$
3. $\forall\ (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{Q}^2$ und $\forall\ \alpha \in \mathbb{Q}$ gilt:
   $f((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = x_1 + x_2 + \sqrt{2} \cdot (y_1 + y_2)$
   $= x_1 + \sqrt{2} \cdot y_1 + x_2 + \sqrt{2} \cdot y_2 = f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)$
   $f(\alpha(x, y)) = f(\alpha \cdot x, \alpha \cdot y) = \alpha \cdot x + \sqrt{2} \cdot \alpha \cdot y = \alpha \cdot (x + \sqrt{2} \cdot y) = \alpha \cdot f(x, y)$
   $\Longrightarrow f$ ist linear
4. $\forall\ \alpha \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ gilt: $f(\alpha \cdot z) = \overline{\alpha \cdot z} = \overline{\alpha} \cdot \overline{z} \neq \alpha \cdot \overline{z} \Longrightarrow f$ nicht linear.
5. $\forall\ x = a + ib, y = c + id \in \mathbb{C}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ gilt:
   $f(x + y) = f(a + ib + c + id) = f(a + c + i(b + d)) = a + c - i(b + d) = a - ib + c - id =$
   $= \overline{a + ib} + \overline{c + id} = f(a + ib) + f(c + id) = f(x) + f(y)$
   $f(\alpha \cdot x) = f(\alpha \cdot (a + ib)) = \overline{\alpha \cdot (a + ib)} = \overline{\alpha} \cdot \overline{(a + ib)} = \alpha \cdot \overline{(a + ib)} = \alpha \cdot f(a + ib) = \alpha \cdot f(x)$
   $\Longrightarrow f$ ist linear
6. $\forall\ \varphi, \psi \in Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$ gilt:
   $f(\varphi + \psi) = (\varphi + \psi)(1) = \varphi(1) + \psi(1) = f(\varphi) + f(\psi)$
   $f(\alpha \cdot \varphi) = (\alpha \cdot \varphi)(1) = \alpha \cdot \varphi(1) = \alpha \cdot f(\varphi)$
   $\Longrightarrow f$ ist linear

H 75. Wieviele lineare Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(2,0) = (0,4), \qquad f(1,1) = (5,2), \qquad f(1,2) = (10,\alpha)$$

gibt es in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$?

Wir verwenden im Folgenden Spaltenvektoren $\binom{x}{y}$ statt der gegebenen Zeilenvektoren (x,y)

Die Urbilder $\binom{2}{0}$ und $\binom{1}{1}$ bilden offensichtlich eine Basis von $\mathbb{R}^2$.

Da lineare Abbildungen eindeutig durch die Angabe von Bildern zu allen Basisvektoren bestimmt sind, gibt es <u>höchstens eine</u> lineare Abbildung mit den geforderten Bildern.

Sei g linear mit $g\left(\binom{2}{0}\right) = \binom{0}{4}$ und $g\left(\binom{1}{1}\right) = \binom{5}{2}$. Dann gilt für $x = \lambda\binom{2}{0} + \mu\binom{1}{1}$

$$g(x) = g\left(\lambda\binom{2}{0} + \mu\binom{1}{1}\right) \overset{\text{linear}}{=} \lambda g\left(\binom{2}{0}\right) + \mu\, g\left(\binom{1}{1}\right) = \lambda\cdot\binom{0}{4} + \mu\cdot\binom{5}{2} = \binom{5\mu}{4\lambda+2\mu} \quad \left(= \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\binom{\lambda}{\mu}\right)$$

<u>1. Weg:</u> Suche λ, μ so, dass $x = \lambda\binom{2}{0} + \mu\binom{1}{1} = \binom{1}{2} \Leftrightarrow \begin{matrix} 2\lambda + \mu = 1 \\ \mu = 2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \lambda = -1/2 \\ \mu = 2 \end{matrix}$

$$\Rightarrow g\left(\binom{1}{2}\right) = g\left(-\tfrac{1}{2}\binom{2}{0} + 2\cdot\binom{1}{1}\right) = -\tfrac{1}{2} g\left(\binom{2}{0}\right) + 2\cdot g\left(\binom{1}{1}\right) = -\tfrac{1}{2}\cdot\binom{0}{4} + 2\cdot\binom{5}{2} = \binom{10}{2} \overset{!}{=} \binom{10}{\alpha} \Leftrightarrow \underline{\underline{\alpha = 2}}$$

<u>2. Weg:</u> Suche λ, μ so, dass $g(x) = \binom{5\mu}{4\lambda+2\mu} = \binom{10}{\alpha} \Leftrightarrow \mu = 2 \wedge \lambda = \frac{\alpha}{4} - 1$

$$\Rightarrow x = \left(\tfrac{\alpha}{4} - 1\right)\binom{2}{0} + 2\cdot\binom{1}{1} = \binom{\alpha/2}{2} \overset{!}{=} \binom{1}{2} \Leftrightarrow \underline{\underline{\alpha = 2}}$$

$\Rightarrow$ Für $\alpha = 2$ gibt es <u>genau eine lin. Abb</u> mit den geforderten Eigenschaften

Für $\alpha \neq 2$ gibt es <u>keine lin. Abb</u>. mit den geforderten Eigenschaften.

<u>Alternativ:</u> lineare Abb $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lassen sich mit Hilfe von Matrizen angeben $\binom{x_1}{x_2} \mapsto \binom{y_1}{y_2} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\binom{x_1}{x_2}$. Die gegebenen Bedingungen liefern 6 lineare Gleichungen in 4 Unbekannten. Mit den ersten beiden Bedingungen erhält man $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\binom{2}{0} = \binom{0}{4} \Rightarrow \begin{matrix} a = 0 \\ c = 2 \end{matrix}$ und $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\binom{1}{1} = \binom{5}{2} \Rightarrow \begin{matrix} b = 5 \\ d = 0 \end{matrix}$

und damit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\binom{1}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\binom{1}{2} = \binom{10}{2} \overset{!}{=} \binom{10}{\alpha} \Leftrightarrow \underline{\alpha = 2}$

H 76. Gegeben sei die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ mit $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

1. Ist f linear, surjektiv, injektiv?
2. Ermitteln Sie eine Basis von $Kern(f)$ und eine Basis von $f(\mathbb{R}^3)$. Welche Dimensionen haben $Kern(f)$ und $f(\mathbb{R}^3)$?

Bezeichne $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ und $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, dann gilt:

$$w = f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_3 \\ x_2 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} \quad (*)$$

$$\text{Bild}(f) = f(\mathbb{R}^3) = \{ w \in \mathbb{R}^4 \mid f(x) = w,\ x \in \mathbb{R}^4 \} = \left\{ x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{Spaltenvektoren der Abb.-Matrix.}$$

1. <u>Linearität</u> z.z.: $\forall x, y \in \mathbb{R}^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}$: $f(x+y) = f(x) + f(y)$; $f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$

<u>1. Weg:</u> direktes Nachrechnen

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + x_2 + y_2 \\ x_1 + y_1 - (x_3 + y_3) \\ x_2 + y_2 + x_3 + y_3 \\ 2x_1 + 2y_1 + x_2 + y_2 - (x_3 + y_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_3 \\ x_2 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ y_1 - y_3 \\ y_2 + y_3 \\ 2y_1 + y_2 - y_3 \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) + f\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right)$$

$$f\left(\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) = f\left(\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \lambda x_2 \\ \lambda x_1 - \lambda x_3 \\ \lambda x_2 + \lambda x_3 \\ 2\lambda x_1 + \lambda x_2 - \lambda x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(x_1 + x_2) \\ \lambda(x_1 - x_3) \\ \lambda(x_2 + x_3) \\ \lambda(2x_1 + x_2 - x_3) \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_3 \\ x_2 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \end{pmatrix} = \lambda \cdot f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right)$$

<u>2. Weg:</u> mit Matrizenoperationen

$f(x+y) = A \cdot (x+y) = A \cdot x + A \cdot y = f(x) + f(y)$ und $f(\lambda \cdot x) = A \cdot (\lambda \cdot x) = \lambda (A \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$.

<u>Surjektivität:</u> <u>1. Weg:</u> f kann nicht surjektiv sein, da

$\dim(f(\mathbb{R}^3)) = \dim \text{Bild}(f) \leq \dim \mathbb{R}^3 = 3 < 4 = \dim(\mathbb{R}^4) \Rightarrow f(\mathbb{R}^3) \subsetneqq \mathbb{R}^4$.

<u>2. Weg:</u> Ansatz: Suche zu $w \in \mathbb{R}^4$ ein $x \in \mathbb{R}^3$: $f(x) = w$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{array}{llr} (1) & x_1 + x_2 & = w_1 \\ (2) & x_1 \quad\quad - x_3 & = w_2 \\ (3) & \quad\quad x_2 + x_3 & = w_3 \\ (4) & 2x_1 + x_2 - x_3 & = w_4 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{llr} (1) & x_1 + x_2 & = w_1 \\ (2') = (2) - (1) & -x_2 - x_3 & = w_2 - w_1 \\ (3) + (2') & 0 & = w_3 + w_2 - w_1 \\ (4) - (1) - (2) & 0 & = w_4 - w_1 - w_2 \end{array} \quad (**)$$

$\Rightarrow$ Für $w_3 + w_2 - w_1 \neq 0$ oder $w_4 - w_1 - w_2 \neq 0$ (z.B. $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$) kann es kein $x \in \mathbb{R}^3$ geben mit $f(x) = w$. $\Rightarrow$ f ist nicht surjektiv.

Injektivität: Für lineare Abbildungen gilt: f injektiv $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Kern}(f)=\{0\}$

$$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \overset{(**)}{\underset{\text{mit } w=0}{\Longleftrightarrow}} \left\{\begin{array}{l} x_1+x_2 = 0 \\ \phantom{x_1+{}} x_2+x_3 = 0\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = x_3 \\ x_2=-x_3\end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_3\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},$$

wobei $x_3\in\mathbb{R}$ als Parameter frei wählbar ist (2 Gleichungen für 3 Unbekannte)

2. $\Rightarrow$ $\underline{\mathrm{Kern}(f)}=\{x\in\mathbb{R}^3 \mid f(x)=0\}=\left\{\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda\in\mathbb{R}\right\}$, $\underline{\dim \mathrm{Kern}(f)=1}$, $\underline{\text{Basis von } \mathrm{Kern}(f)}$ ist $\overset{\text{z.B.}}{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}}$

Dimensionsformel für lineare Abbildungen $f: V\to W$

$\dim \mathrm{Bild}(f)+\dim\mathrm{Kern}(f)=\dim V$

Hier: $\dim\mathrm{Bild}(f)=\underline{\dim f(\mathbb{R}^3)}=\dim\mathbb{R}^3-\dim\mathrm{Kern}(f)=3-1=\underline{2}$

$\Rightarrow$ Die 3 Spaltenvektoren der Abb. Matrix sind linear $\underline{\text{ab}}$hängig und

$f(\mathbb{R}^3)=\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$ wird von 2 linear $\underline{\text{unab}}$hängigen Spaltenvektoren der Abb. Matrix, z.B. von $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$ aufgespannt, die

eine $\underline{\text{Basis von } f(\mathbb{R}^3)}$ bilden.

Bleibt zu zeigen, dass diese beiden linear unabhängig sind:

Ansatz: $\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow$ $\lambda=0$ wegen 2. Komponente
$\mu=0$ wegen 3. Komponente. ✓

<u>Bemerkung</u>: Als Basis von $f(\mathbb{R}^3)$ kann man natürlich je zwei linear unabhängige Vektoren $v_1,v_2\in\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$ wählen.

Aufgabe 77. Magische Quadrate

Eine reelle 3×3-Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ heißt magisches Quadrat, falls alle Zeilensummen, alle Spaltensummen und die beiden Diagonalsummen $a_{11} + a_{22} + a_{33}$ und $a_{13} + a_{22} + a_{31}$ miteinander übereinstimmen.

1. Man zeige, dass die Menge M aller magischen Quadrate ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{3\times 3}$ bezüglich der komponentenweisen Matrizenaddition und skalaren Multiplikation mit $\lambda \in \mathbb{R}$ ist.

2. Man zeige, dass die drei Matrizen

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   eine Basis von M bilden.

3*. Besonders magisch:
Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Zahlen $1, 2, \ldots, 9$ in einem magischen Quadrat anzuordnen?

LÖSUNG:

1. **(a) Direkt mit Hilfe des Untervektorraum-Kriteriums**

   $M \neq \emptyset$, da Nullmatrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M$. Seien $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \in M$

   mit $s_A = a_{11} + a_{12} + a_{13},\ s_B = b_{11} + b_{12} + b_{13}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt:

   $A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{pmatrix} \in M$, und $\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{pmatrix} \in M$

   da für alle Spalten/Zeilen/Diagonalen-Summen von $C = A + B$ bzw. $D = \lambda \cdot A$ gilt:

   $s_C = (a_{11} + b_{11}) + (a_{12} + b_{12}) + (a_{13} + b_{13}) = (a_{11} + a_{12} + a_{13}) + (b_{11} + b_{12} + b_{13}) = s_a + s_b$ und

   $s_D = \lambda a_{11} + \lambda a_{12} + \lambda a_{13} = \lambda \cdot (a_{11} + a_{12} + a_{13}) = \lambda \cdot s_A$.

   (b) Mit Hilfe der Theorie Linearer-Gleichungssysteme
   Die Menge der magischen Quadrate ist mit $s = a_{11} + a_{12} + a_{13}$ die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned}
a_{21} + a_{22} + a_{23} - a_{11} - a_{12} - a_{13} &= 0 \\
a_{31} + a_{32} + a_{33} - a_{11} - a_{12} - a_{13} &= 0 \\
a_{11} + a_{21} + a_{31} - a_{11} - a_{12} - a_{13} &= 0 \\
a_{12} + a_{22} + a_{32} - a_{11} - a_{12} - a_{13} &= 0 \\
a_{13} + a_{23} + a_{33} - a_{11} - a_{12} - a_{13} &= 0 \\
a_{11} + a_{22} + a_{33} - a_{11} - a_{12} - a_{13} &= 0 \\
a_{13} + a_{22} + a_{31} - a_{11} - a_{12} - a_{13} &= 0
\end{aligned}$$

   Da die Summe zweier Lösungen und ein Vielfaches einer Lösung eines homogenen Linearen-Gleichungssystems wieder eine Lösung des Systems ist, folgt unmittelbar, dass die Lösungsmenge M des Systems ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{3\times 3}$ ist.

2. Wir sehen unmittelbar, dass die gegebenen drei Matrizen in M liegen.

   Zu zeigen ist, dass die drei Matrizen linear unabhängig sind und dass man mit ihnen jedes magische Quadrat linear kombinieren kann.

   Lineare Unabhängigkeit: Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$. Angenommen es gilt

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Das ist äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 & \alpha_1 - \alpha_3 \\ \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 & \alpha_1 & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_1 + \alpha_3 & \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 & \alpha_1 - \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Durch komponentenweises Vergleichen, erhalten wir $\alpha_1 = 0$ (Position $(2,2)$), $\alpha_2 = 0$ (Position $(1,1)$ und $\alpha_3 = 0$ (Position $(1,3)$).

   Erzeugendensystem: Um eine Matrix $A \in M$ mit Zeilen/Spalten/Diagonalen-Summe s_A als Linearkombination der V_1, V_2, V_3 zu erhalten, machen wir den Ansatz: $\alpha_1 \cdot V_1 + \alpha_2 \cdot V_2 + \alpha_3 \cdot V_3 = A$ und erhalten wie oben:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 & \alpha_1 - \alpha_3 \\ \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 & \alpha_1 & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_1 + \alpha_3 & \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 & \alpha_1 - \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

   Betrachten wir: $\alpha_1 = a_{22}$, $\alpha_1 + \alpha_2 = a_{11}$, $\alpha_1 + \alpha_3 = a_{31}$, so erhalten wir:

$$\alpha_1 = a_{22}, \quad \alpha_2 = a_{11} - a_{22}, \quad \alpha_3 = a_{31} - a_{22} \quad \text{und} \quad s_A = 3 \cdot \alpha_1 = 3 \cdot a_{22}.$$

   Bleibt zu zeigen, dass die übrigen 6 Gleichungen auch erfüllt sind:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = a_{22} - a_{11} + a_{22} + a_{31} - a_{22} = (a_{22} + a_{31}) - a_{11} = (s_A - a_{13}) - a_{11} = a_{12} \\
&\alpha_1 - \alpha_3 = a_{22} - a_{31} + a_{22} = (2 \cdot a_{22}) - a_{31} = (s_A - a_{22}) - a_{31} = a_{13} \\
&\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = a_{22} - a_{11} + a_{22} - a_{31} + a_{22} = 3 \cdot a_{22} - a_{11} - a_{31} = s_A - a_{11} - a_{31} = a_{21} \\
&\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = a_{22} + a_{11} - a_{22} + a_{31} - a_{22} = (a_{11} + a_{31}) - a_{22} = (s_A - a_{21}) - a_{22} = a_{23} \\
&\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = a_{22} + a_{11} - a_{22} - a_{31} + a_{22} = (a_{11} + a_{22}) - a_{31} = (s_A - a_{33}) - a_{31} = a_{32} \\
&\alpha_1 - \alpha_2 = a_{22} - a_{11} + a_{22} = (2 \cdot a_{22}) - a_{11} = (s_A - a_{22}) - a_{11} = a_{33}
\end{aligned}$$

   Alternativ: Löse das Lineare Gleichungssystem direkt

$$\begin{array}{rclllllllll}
1.Spalte: & (1) & a_{11} & & & +a_{21} & & & +a_{31} & & & = s_A \\
2.Spalte: & (2) & & a_{12} & & & +a_{22} & & & +a_{32} & & = s_A \\
3.Spalte: & (3) & & & a_{13} & & & +a_{23} & & & +a_{33} & = s_A \\
1.Zeile: & (4) & a_{11} & +a_{12} & +a_{13} & & & & & & & = s_A \\
2.Zeile: & (5) & & & & a_{21} & +a_{22} & +a_{23} & & & & = s_A \\
2.Diag.: & (6) & & & a_{13} & & +a_{22} & & +a_{31} & & & = s_A \\
1.Diag.: & (7) & a_{11} & & & & +a_{22} & & & & +a_{33} & = s_A \\
3.Zeile: & (8) & & & & & & & a_{31} & +a_{32} & +a_{33} & = s_A
\end{array}$$

   Folgende Zeilenumformung $(4') = (4) - (1) - (2) - (3) + (4) + (8)$ liefert eine Nullzeile und kann daher weggelassen werden und wir erhalten das äquivalente System mit 7 Gleichungen:

$$
\begin{array}{rcccccccccl}
(1) & a_{11} & & & +a_{21} & & & +a_{31} & & & = s_A \\
(2) & & a_{12} & & & +a_{22} & & & +a_{32} & & = s_A \\
(3) & & & a_{13} & & & +a_{23} & & & +a_{33} & = s_A \\
(5) & & & & a_{21} & +a_{22} & +a_{23} & & & & = s_A \\
(6') = (6) - (3) & & & & & +a_{22} & -a_{23} & +a_{31} & & -a_{33} & = 0 \\
(7') = (7) - (1) & & & & -a_{21} & +a_{22} & & -a_{31} & & +a_{33} & = 0 \\
(8) & & & & & & & a_{31} & +a_{32} & +a_{33} & = s_A
\end{array}
$$

Um in Gleichung $(7')$ die Einträge $-a_{21}$ und a_{22} zu eliminieren, bilden wir $(7'') = (7') + (5) - 2 \cdot (6')$ und erhalten schließlich nach Kürzen mit 3 das äquivalente System:

$$
\begin{array}{rcccccccccl}
(1) & a_{11} & & & +a_{21} & & & +a_{31} & & & = s_A \\
(2) & & a_{12} & & & +a_{22} & & & +a_{32} & & = s_A \\
(3) & & & a_{13} & & & +a_{23} & & & +a_{33} & = s_A \\
(5) & & & & a_{21} & +a_{22} & +a_{23} & & & & = s_A \\
(6') & & & & & +a_{22} & -a_{23} & +a_{31} & & -a_{33} & = 0 \\
(7'') & & & & & & a_{23} & -a_{31} & & +a_{33} & = \frac{1}{3} s_A \\
(8) & & & & & & & a_{31} & +a_{32} & +a_{33} & = s_A
\end{array}
$$

In diesen 7 Gleichungen für 10 Unbekannte (einschließlich s_A) können wir 3 Unbekannte als Parameter wählen und erhalten einen 3-dimensionalen Lösungsraum M.
Da wir bereits V_1, V_2, V_3 als linear unabhängig erkannt haben, bilden diese eine Basis von M.

Andererseits können wir ohne Einschränkung $s_A = 3 \cdot \alpha,\ a_{31} = \alpha + \gamma$ und $a_{33} = \alpha - \beta$ mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ wählen und erhalten aus (8) $a_{32} = 3 \cdot \alpha - (\alpha + \gamma) - (\alpha - \beta) = \alpha + \beta - \gamma$
Rückwärtssubstitution liefert mit $s_A = 3 \cdot \alpha$:
$a_{23} = \alpha + a_{31} - a_{33} = \alpha + (\alpha + \gamma) - (\alpha - \beta) = \alpha + \beta + \gamma$
$a_{22} = a_{23} - a_{31} + a_{33} = \alpha + \beta + \gamma - (\alpha + \gamma) + (\alpha - \beta) = \alpha$
$a_{21} = 3 \cdot \alpha - a_{22} - a_{23} = 3 \cdot \alpha - \alpha - (\alpha + \beta + \gamma) = \alpha - \beta - \gamma$
$a_{13} = 3 \cdot \alpha - a_{23} - a_{33} = 3 \cdot \alpha - (\alpha + \beta + \gamma) - (\alpha - \beta) = \alpha - \gamma$
$a_{12} = 3 \cdot \alpha - a_{22} - a_{32} = 3 \cdot \alpha - \alpha - (\alpha + \beta - \gamma) = \alpha - \beta + \gamma$
$a_{11} = 3 \cdot \alpha - a_{21} - a_{31} = 3 \cdot \alpha - (\alpha - \beta - \gamma) - (\alpha + \gamma) = \alpha + \beta$

$$
\Rightarrow A = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},
$$

d.h. die drei gegebenen Matrizen spannen einen 3-dimensionalen Lösungsraum auf und sind daher linear unabhängig.

Bemerkung:
Wählt man $a_{31} = \lambda,\ a_{32} = \mu,$ und $a_{33} = \tau,$ mit $\lambda, \mu, \tau \in \mathbb{R}$ so ergibt sich: $s_A = \lambda + \mu + \tau$ und man erhält mit der Rücksubstitution M dargestellt in einer anderen Basis.

3. Da alle Zeilensummen miteinander übereinstimmen und die Gesamtsumme der 3 Zeilen $1 + 2 + \cdots + 9 = 45$ ist, muss die Zeilensumme jeweils $s_A = 45/3 = 15$ und damit $a_{22} = \frac{1}{3} s_A = 5$ sein.

   In der Mitte des magischen Quadrates steht also immer die 5.

   Die Zahlen $7, 8$ und 9 dürfen nicht gemeinsam in einer Zeile/Spalte/Diagonale stehen, weil sonst die zugehörige Zeilen/Spalten/Diagonalensumme größer als 15 wäre.

   Wenn man die Symmetrieeigenschaften des magischen Quadrates berücksichtigt *(die Symmetriegruppe des magischen Quadrates ist isomorph zur Symmetriegruppe des Quadrates, hat also insbesondere 8 Elemente)*, gibt es nur zwei verschiedene Fälle, die berücksichtigt werden müssen.

1. Fall: 9 steht auf einer Eckposition (ohne Einschränkung (beachte die Symmetrie) auf der Position $(1,1)$).
Dann ist:

9		
	5	
		1

Ohne Einschränkung (Symmetrie) können wir annehmen, dass die 8 auf der Position $(3,2)$ steht. Dann erhalten wir ein ungültiges magisches Quadrat:

9		
?	5	
6	8	1

2. Fall: 9 steht nicht auf einer Eckposition (ohne Einschränkung (Symmetrie) auf der Position $(2,1)$).
Dann ist:

9	5	1

Ohne Einschränkung (Symmetrie) können wir annehmen, dass die 8 auf der Position $(1,2)$ oder auf der Position $(3,3)$ steht. Im ersten Unterfall erhalten wir wieder ein ungültiges magisches Quadrat:

3	8	
9	5	1
?		7

Im zweiten Unterfall, funktioniert es endlich:

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Also ist das magische Quadrat bis auf die Symmetrie eindeutig und es gibt insgesamt 8 verschiedene - aber zueinander symmetrische - magische Quadrate mit den Zahlen $1, 2, \ldots, 9$.