TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR.DR. JÜRGEN RICHTER-GEBERT, DR. HERMANN VOGEL

Lineare Algebra und analytische Geometrie 1 & Mathematik für Physiker 1 (WS 2007/08)

— Aufgabenblatt 09 (07. Januar 2008) —

— *Präsenzaufgaben* —

M 70. Welche der folgenden Abbildungen sind nicht linear ?

☐ $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) := 3 \cdot x_2 - 2 \cdot x_1$

☐ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $x \mapsto f(x) := (x + 1, x - 1)$

☐ $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) := (x_2, 0)$

☐ $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) := (x_1 \cdot x_2, x_1 + x_2)$

P 71. Seien V und W zwei endlichdimensionale K-Vektorräume über demselben Körper K. Zeigen Sie:

1. Ist $\mathcal{B} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ eine Basis von V, so ist die Koordinatenabbildung
$$\psi : V \to K^n \qquad \text{mit} \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot b_i \mapsto \psi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot b_i\right) := (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$$
ein (wohldefinierter) Vektorraumisomorphismus.

2. Zu V und W existiert genau dann ein K-Vektorraumisomorphismus $\varphi : V \to W$, wenn $dim_K V = dim_K W$.

P 72. Gegeben sei die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ sowie der Vektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

1. Geben Sie eine Basis von $Kern(f)$ und eine Basis von $Bild(f) = f(\mathbb{R}^4)$ an.
2. Geben Sie den Faktorraum $\mathbb{R}^4/Kern(f)$ sowie eine Basis dafür an.
3. Wie lässt sich der Faktorraum und seine Elemente geometrisch deuten?
Betrachten Sie speziell die Nebenklasse $[v]_{Kern(f)}$ in den Schnitten des $\mathbb{R}^4$ mit $x_1 = 1$ bzw. $x_4 = 0$.
4. Zeigen Sie, dass die Nebenklasse $[v]_{Kern(f)}$ alle Vektoren des $\mathbb{R}^4$ enthält, die durch f auf denselben (Bild-)Vektor $w \in \mathbb{R}^2$ abgebildet werden.

— *Zentrale Präsenzaufgaben* —

Z 73. Seien V und W Vektorräume über dem Körper K und die Abbildung $f : V \to W$ linear.
Ferner sei $(b_1, b_2, ..., b_n), n \in \mathbb{N}$ eine Basis von V. Zeigen Sie:

1. Die Abbildung f ist genau dann injektiv, wenn $Kern(f) = \{0\}$ ist.
2. Die Abbildung f ist genau dann injektiv, wenn $(f(b_1), f(b_2), ..., f(b_n))$ linear unabhängig in W ist.
3. Die Abbildung f ist genau dann surjektiv, wenn $(f(b_1), f(b_2), ..., f(b_n))$ ein Erzeugendensystem von W ist.
4. Die Abbildung f ist im Fall $V = W$ genau dann injektiv, wenn f surjektiv ist.

   Hinweis: Verwenden Sie den Basisaustauschsatz und den Basisergänzungssatz.

— *Hausaufgaben* —

H 74. Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Linearität.

1. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $(x, y) \mapsto f(x, y) := (3x + 2y, x)$
2. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := \vartheta x + \zeta$ für feste $\vartheta, \zeta \in \mathbb{R}$
3. $f : \mathbb{Q}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y) \mapsto f(x, y) := x + \sqrt{2}y$ (über $\mathbb{Q}$)
4. $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $z \mapsto \overline{z}$ (über $\mathbb{C}$)
5. $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $z \mapsto \overline{z}$ (über $\mathbb{R}$)
6. $f : \mathit{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi \mapsto f(\varphi) := \varphi(1)$

Hinweis: $f : V \to W$ über K bedeutet Abbildung f zwischen den Vektorräumen V und W über demselben Körper K.

H 75. Wieviele lineare Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(2, 0) = (0, 4), \qquad f(1, 1) = (5, 2), \qquad f(1, 2) = (10, \alpha)$$

gibt es in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$?

H 76. Gegeben sei die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ mit $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

1. Ist f linear, surjektiv, injektiv?
2. Ermitteln Sie eine Basis von $Kern(f)$ und eine Basis von $f(\mathbb{R}^3)$.
   Welche Dimensionen haben $Kern(f)$ und $f(\mathbb{R}^3)$?

H 77. Magische Quadrate

Eine reelle 3×3-Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ heißt magisches Quadrat, falls alle Zeilensummen, alle Spaltensummen und die beiden Diagonalsummen $a_{11} + a_{22} + a_{33}$ und $a_{13} + a_{22} + a_{31}$ miteinander übereinstimmen.

1. Man zeige, dass die Menge M aller magischen Quadrate ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{3\times 3}$ bezüglich der komponentenweisen Matrizenaddition und skalaren Multiplikation mit $\lambda \in \mathbb{R}$ ist.
2. Man zeige, dass die drei Matrizen

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   eine Basis von M bilden.

3*. Besonders magisch:
   Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Zahlen $1, 2, \ldots, 9$ in einem magischen Quadrat anzuordnen?

In Aufgabe 77 ist die Teilaufgabe 3* ein Zusatz, dessen Bearbeitung freigestellt ist.

Abgabetermin ist der 21.01.2008 bis 12:00 Uhr (Einwurfkasten im Untergeschoss des FMI-Gebäudes).