Aufgabe 61. Linearkombinationen von Vektoren
Gegeben sei folgende Menge M von 6 Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_6 \in \mathbb{R}^4$:

$$M = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

1. Zeigen Sie, dass sich jeder Vektor $v_i \in M$, $i = 1, 2, \ldots, 6,$ als Linearkombination der anderen Vektoren aus $M \backslash \{v_i\}$ schreiben lässt.
2. Zeigen Sie, dass gilt: span$(v_2, v_5, v_6) =$ span(v_3, v_5, v_6).
3. Geben Sie eine Basis des von M aufgespannten Untervektorraums des $\mathbb{R}^4$ an.
4. Betrachten Sie für $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6 \in \mathbb{R}$ die Vektorgleichung (Linearkombinationen des Nullvektors $0 \in \mathbb{R}^4$):
$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 + \lambda_4 \cdot v_4 + \lambda_5 \cdot v_5 + \lambda_6 \cdot v_6 = 0.$$
Zeigen Sie, dass die Menge $K := \left\{ (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6) \in \mathbb{R}^6 \mid \sum_{i=1}^{6} \lambda_i \cdot v_i = 0 \right\}$ aller Vektoren $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6) \in \mathbb{R}^6$, welche die obige Vektorgleichung erfüllen, ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^6$ ist.

<u>LÖSUNG:</u>

1. v ist eine Linearkombination (LK) von n Vektoren $v_1, .., v_n \in V$ (Vektorraum über K), $n \in \mathbb{N}$
$$\Leftrightarrow \; v = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + ... + \lambda_n \cdot v_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \text{ mit } \lambda_i \in K.$$
Durch Vergleich der Komponenten der Vektoren erkennt man beispielsweise:
$v_1 = v_2 + v_4,\;\; v_2 = v_1 - v_4,\;\; v_3 = v_2 - v_5,\;\; v_4 = v_1 - v_2,\;\; v_5 = v_2 - v_3,\;\; v_6 = v_2 + v_3.$
2. $$\text{span}(v_1, .., v_n) = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, .., n\}$$
Wir zeigen zunächst span$(v_2, v_5, v_6) \subseteq$ span(v_3, v_5, v_6) und suchen v_2 als LK von v_3, v_5, v_6
$v_2 = v_3 + v_5 \Rightarrow v_2, v_5, v_6 \in$ span$(v_3, v_5, v_6) \Rightarrow$ span$(v_2, v_5, v_6) \subseteq$ span(v_3, v_5, v_6)
Umgekehrt gilt:
$v_3 = v_2 - v_5 \Rightarrow v_3, v_5, v_6 \in$ span$(v_2, v_5, v_6) \Rightarrow$ span$(v_3, v_5, v_6) \subseteq$ span(v_2, v_5, v_6)
Insgesamt folgt: span$(v_3, v_5, v_6) =$ span(v_2, v_5, v_6)
Zusatz: Wegen $v_2 = \frac{1}{2}(v_5 + v_6)$ bzw. $v_3 = \frac{1}{2}(v_6 - v_5)$ gilt:
span$(v_2, v_5, v_6) =$ span$(v_3, v_5, v_6) =$ span(v_5, v_6)
3. Um eine Basis des Untervektorraums (?) $U =$ span$(v_1, v_2, \ldots, v_6)$ anzugeben, müssen wir eine minimale Teilfamilie B von $\{v_1, v_2, \ldots, v_6\}$ mit span $B =$ span$(v_1, v_2, \ldots, v_6)$ angeben.
Für die Vektoren v_4, v_5, v_6 gilt nach 1.: $v_4 = v_1 - v_2,\;\; v_5 = v_2 - v_3$ und $v_6 = v_2 + v_3$.
Somit gilt span$(v_1, v_2, \ldots, v_6) =$ span(v_1, v_2, v_3).

Nun ist noch die lineare Abhängigkeit der drei Vektoren v_1, v_2 und v_3 zu untersuchen. Wir vermuten, dass diese drei Vektoren linear unabhängig sind, und zeigen dazu, dass diese nur eine triviale LK des Nullvektors bilden, d.h. aus dem Ansatz: $\quad \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0 \quad$ folgt $\quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{array}{rcrcrcll} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 & \Leftrightarrow \lambda_2 = -\lambda_1 \\ 2\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 & \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 & \Rightarrow \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 & \Rightarrow \lambda_1 = 0 \end{array}$$

$$\iff \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Somit sind die drei Vektoren v_1, v_2 und v_3 linear unabhängig und $B = (v_1, v_2, v_3)$ eine minimale Teilfamilie mit span $B = \text{span}(v_1, v_2, \ldots, v_6)$. Also ist B eine Basis des Untervektorraumes U, der ein drei-dimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}^4$ ist.

4. Es sei also $K = \{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_6) \in \mathbb{R}^6 | \sum\limits_{i=1}^{6} \lambda_i v_i = 0\}$.

   Um nachzuweisen, dass K ein Untervektorraum ist, weisen wir nach, dass K nicht die leere Menge ist, dass K unter der Vektor-Addition abgeschlossen ist, und dass K unter Multiplikation mit Skalaren abgeschlossen ist. Dabei ist noch zu bemerken, dass bei dem Beweis die spezielle Gestalt der Vektoren $v_1, \ldots, v_6$ gar nicht berücksichtigt werden muss. (Um Platz zu sparen, schreiben wir die Elemente von $\mathbb{R}^6$ als 6-Tupel.)

   - $K \neq \emptyset$, weil der Nullvektor $(0,0,0,0,0,0)$ in K ist.
   - Es seien $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_6)$, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_6) \in K$. Dann ist auch $\lambda + \mu \in K$, weil $\lambda + \mu = (\lambda_1 + \mu_1, \ldots, \lambda_6 + \mu_6)$ und

     $$\sum_{i=1}^{6} (\lambda_i + \mu_i) v_i = \sum_{i=1}^{6} (\lambda_i v_i + \mu_i v_i) = (\sum_{i=1}^{6} \lambda_i v_i) + (\sum_{i=1}^{6} \mu_i v_i) = 0 + 0 = 0$$

     gilt.
   - Es sei $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_6) \in K$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist auch $\alpha\lambda \in K$, weil $\alpha\lambda = (\alpha\lambda_1, \ldots, \alpha\lambda_6)$ und

     $$\sum_{i=1}^{6} ((\alpha\lambda_i) \cdot v_i) = \sum_{i=1}^{6} (\alpha \cdot (\lambda_i \cdot v_i)) = \alpha \cdot (\sum_{i=1}^{6} (\lambda_i \cdot v_i)) = \alpha \cdot 0 = 0$$

     gilt.

P 62. Basen von $\mathbb{Z}_2^3$.

1. Geben Sie alle Elemente von $\mathbb{Z}_2^3$ an und begründen Sie, warum $\mathbb{Z}_2^3$ bezüglich der komponentenweisen Addition und skalaren Multiplikation ein $\mathbb{Z}_2$-Vektorraum ist.
2. Geben Sie mindestens zwei verschiedene Basen von $\mathbb{Z}_2^3$ an. Wieviele verschiedene Basen gibt es?
3. Geben Sie alle Untervektorräume von $\mathbb{Z}_2^3$ an.

1\. Wegen $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ hat $\mathbb{Z}_2^k$ genau 2^k Elemente ($k \in \mathbb{N}$). Also hat

$\mathbb{Z}_2^3 = \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$ genau 8 Elemente.

$(\mathbb{Z}_2, \oplus_2, \odot_2)$ ist bezüglich Addition und Multiplikation modulo 2 ein Körper ist $\Rightarrow \mathbb{Z}_2^3$ ist bezüglich der komponentenweisen Addition und skalaren Multiplikation ein Vektorraum, da:

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1 \oplus_2 b_1\\a_2 \oplus_2 b_2\\a_3 \oplus_2 b_3\end{pmatrix} \text{ und } \lambda \cdot \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda \odot_2 a_1\\\lambda \odot_2 a_2\\\lambda \odot_2 a_3\end{pmatrix} \text{ mit } a_i, b_i, \lambda \in \mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$$

und $(\mathbb{Z}_2, \oplus_2)$ eine abelsche Gruppe und $(\mathbb{Z}_2, \oplus_2, \odot_2)$ assoziativ und distributiv ist, vgl. Vorlesung zu Vektorraum $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.
(Allgemein: K Körper $\Rightarrow K^n$ Vektorraum)

2\. Wegen $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ gibt es nur 4 Linearkombinationen zweier verschiedener Vektoren $a, b \in \mathbb{Z}_2^3 \setminus \{0\}$, $a \neq b$

$0 \cdot a + 0 \cdot b = 0$; $0 \cdot a + 1 \cdot b = b$

$1 \cdot a + 0 \cdot b = a$; $1 \cdot a + 1 \cdot b = s := a + b \notin \{0, a, b\}$ (warum?)

$\Rightarrow c \in \mathbb{Z}_2^3 \setminus \{0, a, b, a+b\}$ ist keine Linearkombination von a, b

$\Rightarrow a, b, c \in \mathbb{Z}_2^3 \setminus \{0\}$ mit $a \neq b$ und $c \notin \{0, a, b, a+b\}$ sind stets linear unabhängig und bilden eine Basis von $\mathbb{Z}_2^3$

z.B. Standardbasis $\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ oder $\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$

Anzahl der Basen?

Wahl von $a \in \mathbb{Z}_2^3 \setminus \{0\}$ — 7 Möglichkeiten

Wahl von $b \in \mathbb{Z}_2^3 \setminus \{0, a\}$ — 6 Möglichkeiten

Wahl von $c \in \mathbb{Z}_2^3 \setminus \{0, a, b, a+b\}$ — 4 Möglichkeiten

$\Rightarrow$ Anzahl möglicher Basen $= 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3!} = 28$

Basis unabhängig von der Reihenfolge von a, b, c!

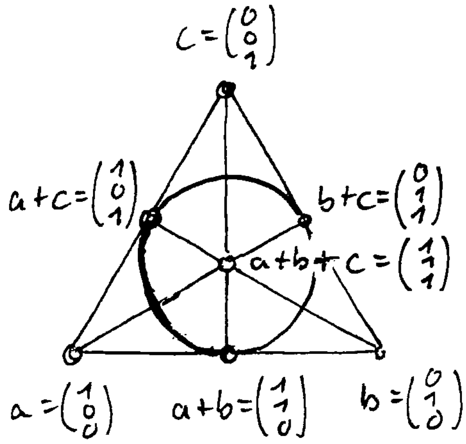
3. Suche Untervektorräume (UVR) von $\mathbb{Z}_2^3$

(i) $\{0\}$ und $\mathbb{Z}_2^3$ sind die beiden trivialen UVR

(ii) $\forall x \in \mathbb{Z}_2^3 \setminus \{0\}$ ist $\{0, x\}$ ein UVR, da $x + x = 0$. Davon gibt es 7

(iii) Enthält ein UVR $x, y \in \mathbb{Z}_2^3 \setminus \{0\}$ mit $x \neq y$, so auch $x + y$ und es gilt: $\{0, x, y, x+y\}$ ist ein UVR, wobei $x, y, x+y$ ein Tripel linear abhängiger Vektoren aus $\mathbb{Z}_2^3 \setminus \{0\}$ ist.

Setzt man $a = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, so kann man die Tripel linear abhängiger Vektoren aus $\mathbb{Z}_2^3 \setminus \{0\}$ wie folgt in einem gleichseitigen Dreieck anordnen, wobei



- a, b, c die Ecken,
- $a+b$, $b+c$, $a+c$ die Seitenmitten und
- $a+b+c$ den Inkreismittelpunkt bilden

Dann gilt offenbar, dass genau diejenigen Vektoren, die auf einer Geraden oder auf dem Inkreis liegen, Tripel linear abhängiger Vektoren aus $\mathbb{Z}_2^3 \setminus \{0\}$ bilden. Damit gibt es genau 7 solche Tripel, d.h.

Es gibt genau 7 UVR $\{0, x, y, x+y\}$ mit $x, y \in \mathbb{Z}_2^3 \setminus \{0\}$, $x \neq y$.

(iv) Enthält ein UVR neben $x, y \in \mathbb{Z}_2^3 \setminus \{0\}$ mit $x \neq y$ ein $z \in \mathbb{Z}_2^3 \setminus \{0, x, y, x+y\}$ so sind x, y, z linear unabhängig und der UVR gleich $\mathbb{Z}_2^3$!

$\Rightarrow$ Es gibt genau 16 UVR von $\mathbb{Z}_2^3$.

Bemerkungen:

1) Anzahl von Tripeln verschiedener Vektoren aus $\mathbb{Z}_2^3 \setminus \{0\}$ ist $\binom{7}{3} = 35$ (ohne Ordnung!)
Anzahl von Tripeln die linear abhängig sind ist 7
$\Rightarrow$ Anzahl möglicher Basen von $\mathbb{Z}_2^3$ ist $35 - 7 = 28$

2) Die Skizze zeigt die sogenannte FANO-Konfiguration aus 7 Punkten und 7 „Geraden", wobei jeder Punkt auf genau 3 „Geraden" und umgekehrt jede „Gerade" durch genau 3 Punkte läuft, vgl. projektive Geometr. und fehlerkorrigierende Codes in der Informatik.

P 63. Lineare Unabhängigkeit

1. Zeigen Sie, dass die Menge $M := \{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ der Monome x^n über $\mathbb{R}$ linear unabhängig ist und damit eine Basis des Vektorraums der Polynome bildet.
2. (a) Zeigen Sie, dass die Menge $L := \{\ln(p) \mid p\,\text{prim}\} \subset \mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$ linear unabhängig ist.
   (b) Zeigen Sie, dass $\ln(1+\sqrt{2})$ nicht im Spann von L liegt - die Menge L ist also keine $\mathbb{Q}$-Basis von $\mathbb{R}$.

Definition aus Vorlesung

Eine unendliche Menge M von Vektoren heißt linear unabhängig, wenn jede endliche Teilmenge linear unabhängig ist.

1) Hier genügt zu zeigen:

$\forall s \in \mathbb{N}$ ist $\{x^n \mid n \in J_s\}$ mit $J_s := \{0, 1, \ldots, s\}$ linear unabhängig. (*)

Begründung

a) Ist $\{x^n \mid n \in J_s\}$ linear unabhängig $\Rightarrow \{x^n \mid n \in J\}$ linear unabhängig $\forall J \subseteq J_s$.

b) Um alle Teilmengen $J \subset \mathbb{N}$ mit $|J| < \infty$ zu betrachten, wähle jeweils $s = \max\{i \mid i \in J\}$

Nachweis von (*) durch Widerspruchsbeweis:

Annahme: Für ein $s \in \mathbb{N}$ ist $\{x^n \mid n \in J_s\}$ linear abhängig

$\Rightarrow \exists$ nicht triviale Linearkombination der Null (Abbildung) 0 aus den x^i, $i \in J_s$, also $\sum_{i=0}^{s} \lambda_i x^i = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_k \neq 0$ für mindestens ein $k \in J_s$.

$\Rightarrow \exists r \in J_s: r = \max\{i \in J_s \mid \lambda_i \neq 0\} \Rightarrow 0 = \sum_{i=0}^{s} \lambda_i x^i = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i x^i \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad | : \lambda_r \neq 0$

$\Leftrightarrow 0 = \left(\sum_{i=0}^{r-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_r} \cdot x^i\right) + x^r \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (**)$

liefert einen Widerspruch [und damit $\{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist linear unabhängig], da

1. Weg: mit Grenzwerten aus Analysis

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x^r + \sum_{i=0}^{r-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_r} \cdot x^i\right) \underset{\uparrow}{=} +\infty \neq 0 \ ⚡$$

„höchste Potenz überwiegt für große x"

2. Weg: ohne Grenzwerte dafür mit Abschätzungen für $x > 1$

$$(**) \Leftrightarrow x^r = -\sum_{i=0}^{r-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_r} x^i \underset{\uparrow}{=} \sum_{i=0}^{r-1} \mu_i x^i \underset{\uparrow}{\leq} \sum_{i=0}^{r-1} |\mu_i| \cdot |x|^i \underset{\uparrow}{\leq} \left(\sum_{i=0}^{r-1} |\mu_i|\right) \cdot x^{r-1} \underset{\uparrow}{\overset{}{<}} x^r \ ⚡$$

$\mu_i = -\frac{\lambda_i}{\lambda_r}$; in $\mathbb{R}$: $\sum_{i=0}^{n} a_i \leq \sum_{i=0}^{n} |a_i|$; $\quad x^i \leq x^{r-1}$ für $x > 1$! $\quad$ für $x \underset{\neq}{\geq} \sum_{i=0}^{r-1} \left|\frac{\lambda_i}{\lambda_r}\right| = \sum_{i=0}^{r-1} |\mu_i|$

Bem: Für $x > \max\left(1, \sum_{i=0}^{r-1} \left|\frac{\lambda_i}{\lambda_r}\right|\right)$ folgt: $x^r + \sum_{i=0}^{r-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_r} x^i \overset{(**)}{=} 0 < x^r + \sum_{i=0}^{r-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_r} x^i$!

2) $L = \{ \ln(p) \mid p \text{ prim} \}$ linear <u>unabhängig</u> über $\mathbb{Q}$?

a)

<u>Zu zeigen</u>: Für je n paarweise verschiedenen Primzahlen $p_1, \dots, p_n$, $n \in \mathbb{N}$ gilt: Aus der Linearkombination der Null, d.h. $\sum_{i=1}^{n} q_i \ln(p_i) = 0$ mit $q_i \in \mathbb{Q}$ folgt $q_i = 0 \ \forall i$

<u>Beweis</u>: o.B.d.A. $q_1, q_2, \dots, q_n \in \mathbb{Z}$ (Multiplikation der Gleichung mit dem Hauptnenner der q_i)

$$\sum_{i=1}^{n} q_i \ln(p_i) = 0 \underset{x\ln(y)=\ln(y^x)}{\Leftrightarrow} \sum_{i=1}^{n} \ln(p_i^{q_i}) = 0 \underset{\ln(x)+\ln(y)=\ln(x\cdot y)}{\Leftrightarrow} \ln\Big(\prod_{i=1}^{n} p_i^{q_i}\Big) = 0 \underset{\ln(x)=0 \Leftrightarrow x=1}{\Leftrightarrow} \prod_{i=1}^{n} p_i^{q_i} = 1 .$$

o.B.d.A $q_1, q_2, \dots, q_\ell \geq 0$ und $q_{\ell+1}, q_{\ell+2}, \dots, q_n < 0$ (Umnummerieren der p_i)

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n} p_i^{q_i} = 1 \Leftrightarrow \prod_{i=1}^{\ell} p_i^{q_i} = \prod_{i=\ell+1}^{n} p_i^{-q_i} \quad \text{(jeweils Exponenten} \geq 0 \text{ !)}$$

Annahme: $\exists\, i \in \{1, 2, \dots, n\}: q_i \neq 0$

$\Rightarrow p_i$ teilt genau eine Seite der obigen Gleichung, da die Primzahlen nach Voraussetzung paarweise verschieden sind $\lightning$

$\Rightarrow \forall\, i \in \{1, 2, \dots, n\}: q_i = 0$, also ist L über $\mathbb{Q}$ linear unabhängig !

b) <u>Annahme</u> $\ln(1+\sqrt{2}) \in \operatorname{span}(L)$

$\Rightarrow \ln(1+\sqrt{2}) = \sum_{i=1}^{n} q_i \ln(p_i)$ mit $q_i \in \mathbb{Q}$ $(\forall i)$ und paarweise versch. Primzahlen p_i.

$$\overset{\exp}{\Rightarrow} 1+\sqrt{2} = \exp\Big(\sum_{i=1}^{n} \ln(p_i^{q_i})\Big) = \exp\Big(\ln\Big(\prod_{i=1}^{n} p_i^{q_i}\Big)\Big) = \prod_{i=1}^{n} p_i^{q_i} \quad \text{(vgl. oben !)}$$

Sei ℓ Hauptnenner der q_i $(\ell > 0, \ell \in \mathbb{N})$

$$\Rightarrow (1+\sqrt{2})^{\ell} = \prod_{i=1}^{n} p_i^{m_i} \text{ mit } m_i \in \mathbb{Z} \ (\forall i) \qquad (*)$$

<u>Hilfssatz</u>: $(1+\sqrt{2})^{\ell} = a + b\sqrt{2}$ mit $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (vgl. Aufgabe P9)

<u>Beweis</u>: Induktion nach ℓ: $\ell = 1$ klar Ind.vor. $(1+\sqrt{2})^{\ell} = a + b\sqrt{2}$, $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\ell \to \ell+1: (1+\sqrt{2})^{\ell+1} = (1+\sqrt{2})^{\ell}(1+\sqrt{2}) = (a+b\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) = \underbrace{(a+2b)}_{=a' \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} + \underbrace{(a+b)}_{=b' \in \mathbb{N}\setminus\{0\}}\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2}$$

$$\text{Somit: } (1+\sqrt{2})^{\ell} = a + b\sqrt{2} \overset{(*)}{=} \prod_{i=1}^{n} p_i^{m_i} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{\prod_{i=1}^{n} p_i^{m_i} - a}{b} \in \mathbb{Q} \ \lightning$$

$\Rightarrow \ln(1+\sqrt{2}) \notin \operatorname{span}(L)$

Aufgabe 64. Basiswechsel konkret.
Gegeben seien die drei Einheitsvektoren $e_1,\ e_2,\ e_3 \in \mathbb{R}^3$ sowie drei weitere Vektoren $v_1,\ v_2,\ v_3 \in \mathbb{R}^3$:

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \qquad v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}.$$

1. Die Standardbasis des $\mathbb{R}$–Vektorraums $\mathbb{R}^3$ besteht aus den drei Einheitsvektoren $e_1,\ e_2,\ e_3 \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass die Vektoren $v_1,\ v_2,\ v_3 \in \mathbb{R}^3$ ebenfalls eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden, und stellen Sie die Einheitsvektoren $e_1,\ e_2,\ e_3$ als Linearkombinationen der Vektoren der Basis $\{v_1, v_2, v_3\}$ dar.

2. Gegeben seien nun die drei Vektoren $p = \begin{pmatrix}6\\3\\9\end{pmatrix}$, $q = \begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}$ und $s = \begin{pmatrix}s_1\\s_2\\s_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

   Stellen Sie die drei Vektoren p, q und s jeweils
   (a) als Linearkombination der Vektoren der Standardbasis $\{e_1, e_2, e_3\}$ dar und
   (b) als Linearkombination der Vektoren der Basis $\{v_1, v_2, v_3\}$ dar.

LÖSUNG:

1. Wir zeigen, dass die drei Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind, durch den Ansatz:
   $\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 = 0$ mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lrcrcrcr} (1) & \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ (2) & & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ (3) & \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{crcrcr} (1)-(2) & & & \lambda_1 & = & 0 \\ (2) & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ (3)-(1) & & & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \Rightarrow \quad \text{Behauptung.}$$

   Da die Dimension von $\mathbb{R}^3$ drei ist, bilden v_1, v_2, v_3 eine Basis des $\mathbb{R}^3$ und es lassen sich alle Vektoren des $\mathbb{R}^3$ als Linearkombinationen der Basisvektoren v_1, v_2, v_3 darstellen.

   Wir bestimmen die Linearkombination für $e_i,\ i = 1, 2, 3$ jeweils durch den Ansatz:
   $\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 = e_i$ mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$

$$\text{Für } i = 1: \ \lambda_1 \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lrcrcrcr} (1) & \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 1 \\ (2) & & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ (3) & \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{crcrcr} (1)-(2) & & & \lambda_1 & = & 1 \\ (2) & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ (3)-(1) & & & \lambda_3 & = & -1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1 \Rightarrow \quad e_1 = v_1 + v_2 - v_3.$$

$$\text{Für } i = 2: \lambda_1 \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lrcrcrcr} (1) & \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ (2) & & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 1 \\ (3) & \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{crcrcr} (1)-(2) & & & \lambda_1 & = & -1 \\ (2) & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 1 \\ (3)-(1) & & & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0 \Rightarrow \quad e_2 = -v_1 + v_2.$$

   Dies kann man auch direkt sehen!

Für $i=3: \ \lambda_1 \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcccccc} (1) & \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ (2) & & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ (3) & \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 1 \end{array} \right\}$

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} (1)-(2) & & & \lambda_1 & = & 0 \\ (2) & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ (3)-(1) & & & \lambda_3 & = & 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1 \Rightarrow \quad e_3 = -v_2 + v_3.$

Dies kann man auch direkt sehen!

2. (a) Die Vektoren p, q und s erhält man direkt als Linearkombinationen der Einheitsvektoren e_1, e_2, e_3:

$$p = 6 \cdot e_1 + 3 \cdot e_2 + 9 \cdot e_3\ , \quad q = 3 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 + 6 \cdot e_3\ , \quad s = s_1 \cdot e_1 + s_2 \cdot e_2 + s_3 \cdot e_3\ .$$

(b) Da wir in 1. die Einheitsvektoren als Linearkombinationen der Vektoren v_1, v_2, v_3 bestimmt haben:

$$e_1 = v_1 + v_2 - v_3\ , \quad e_2 = -v_1 + v_2\ , \quad e_3 = -v_2 + v_3$$

bekommen wir die Linearkombinationen der Vektoren p, q und s in der Basis v_1, v_2, v_3 direkt als:

$$\begin{aligned} p &= 6 \cdot e_1 + 3 \cdot e_2 + 9 \cdot e_3 \ = \ 6 \cdot (v_1 + v_2 - v_3) + 3 \cdot (-v_1 + v_2) + 9 \cdot (-v_2 + v_3) \\ &= 3 \cdot v_1 + 3 \cdot v_3 \quad \text{Probe durch Nachrechnen!} \\ q &= 3 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 + 6 \cdot e_3 \ = \ 3 \cdot (v_1 + v_2 - v_3) + 2 \cdot (-v_1 + v_2) + 9 \cdot (-v_2 + v_3) \\ &= v_1 - v_2 + 3 \cdot v_3 \quad \text{Probe durch Nachrechnen!} \\ s &= s_1 \cdot e_1 + s_2 \cdot e_2 + s_3 \cdot e_3 \ = \ s_1 \cdot (v_1 + v_2 - v_3) + s_2 \cdot (-v_1 + v_2) + s_3 \cdot (-v_2 + v_3) \\ &= (s_1 - s_2) \cdot v_1 + (s_1 + s_2 - s_3) \cdot v_2 + (-s_1 + s_3) \cdot v_3 = s'_1 \cdot v_1 + s'_2 \cdot v_2 + s'_3 \cdot v_3 \end{aligned}$$

mit $s'_1 = s_1 - s_2$, $s'_2 = s_1 + s_2 - s_3$, und $s'_3 = -s_1 + s_3$ als Koordinaten von s in der Basis $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Damit haben wir eine einfache Umrechnung
der alten Koordinaten s_1, s_2, s_3 von s bzgl. der alten Basis $\{e_1, e_2, e_3\}$ in
die neuen Koordinaten s'_1, s'_2, s'_3 von s bzgl. der neuen Basis $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Bemerkung:
Man kann die neuen Koordinaten von p, q oder s auch über folgenden Ansatz bestimmen:
$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 = p,\ q$ oder s mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$
Dies führt wie oben auf Lineare Gleichungssysteme zur Bestimmung der neuen Koordinaten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ in der Basis $\{v_1, v_2, v_3\}$, z.B. für $s: \ \lambda_1 \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}s_1\\s_2\\s_3\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccccccc} (1) & \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & s_1 \\ (2) & & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & s_2 \\ (3) & \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & s_3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccccc} (1)-(2) & & & \lambda_1 & = & s_1 - s_2 \\ (2) & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & s_2 \\ (3)-(1) & & & \lambda_3 & = & s_3 - s_1 \end{array} \right\}$

$\Leftrightarrow \ \lambda_1 = s_1 - s_2, \ \ \lambda_2 = s_1 + s_2 - s_3, \ \ \lambda_3 = -s_1 + s_3$
$\Rightarrow \quad s = (s_1 - s_2) \cdot v_1 + (s_1 + s_2 - s_3) \cdot v_2 + (-s_1 + s_2) \cdot v_3.$

Damit gilt für $p:$ $\quad p = (6-3) \cdot v_1 + (6+3-9) \cdot v_2 + (-6+9) \cdot v_3 = 3 \cdot v_1 + 3 \cdot v_3$
und für $q:$ $\quad q = (3-2) \cdot v_1 + (3+2-6) \cdot v_2 + (-3+6) \cdot v_3 = v_1 - v_2 + 3 \cdot v_3$