Aufgabe 65. Ganz schön span(n)end.
Gegeben sei folgende Menge M von 6 Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_6 \in \mathbb{R}^4$ aus Aufgabe P 61:

$$M = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr ?

☐ $\text{span}(v_2, v_3, v_5) = \text{span}(v_3, v_5)$ ☐ $\text{span}(v_1, v_5, v_6) = \text{span}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$
☐ $\text{span}(v_2, v_3, v_5) = \text{span}(v_1, v_3, v_5)$ ☐ $\text{span}(v_1, v_2, v_4) = \text{span}(v_2, v_3, v_5, v_6)$

LÖSUNG:

1. ☒ $\text{span}(v_2, v_3, v_5) = \text{span}(v_3, v_5)$ 2. ☒ $\text{span}(v_1, v_5, v_6) = \text{span}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$
3. ☐ $\text{span}(v_2, v_3, v_5) = \text{span}(v_1, v_3, v_5)$ 4. ☐ $\text{span}(v_1, v_2, v_4) = \text{span}(v_2, v_3, v_5, v_6)$

Begründungen zu

1. Wegen $v_2 = v_3 + v_5 \Rightarrow v_2, v_3, v_5 \in \text{span}(v_3, v_5) \Rightarrow \text{span}(v_2, v_3, v_5) \subseteq \text{span}(v_3, v_5)$.
   Umgekehrt gilt sicher: $\text{span}(v_2, v_3, v_5) \supseteq \text{span}(v_3, v_5)$, also insgesamt: $\text{span}(v_2, v_3, v_5) = \text{span}(v_3, v_5)$.
2. Wegen $v_2 = \frac{1}{2}(v_5 + v_6)$, $v_3 = \frac{1}{2}(v_6 - v_5)$ und $v_4 = v_1 - v_2 = v_1 - \frac{1}{2}(v_5 + v_6)$ gilt:
   $\text{span}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6) \subseteq \text{span}(v_1, v_5, v_6)$. Umgekehrt gilt offensichtlich auch
   $\text{span}(v_1, v_5, v_6) \subseteq \text{span}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$, also folgt Gleichheit.
   Anmerkung: Dass v_4 eine Linearkombination von v_1, v_5, v_6 kann man auch mittels Ansatz:
   $v_4 = \lambda \cdot v_1 + \mu \cdot v_5 + \nu \cdot v_6$ bestimmen.
3. Nach 1. gilt: $\text{span}(v_2, v_3, v_5) = \text{span}(v_3, v_5)$, aber $v_1 \notin \text{span}(v_3, v_5)$, da der Ansatz
   $$\lambda \cdot v_3 + \mu \cdot v_5 = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = v_1 \quad \text{zum Widerspruch führt.}$$
4. Wegen $v_5 = v_2 - v_3$ und $v_6 = v_2 + v_3$ gilt: $\text{span}(v_2, v_3, v_5, v_6) = \text{span}(v_2, v_3)$
   aber $v_1 \notin \text{span}(v_2, v_3)$, da v_1, v_2, v_3 nach Aufgabe 40 linear unabhängig sind, bzw. der Ansatz
   $$\lambda \cdot v_2 + \mu \cdot v_3 = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda + \mu \\ \lambda + \mu \\ \lambda \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = v_1 \quad \text{zum Widerspruch führt.}$$

Aufgabe 66. Basen von Untervektorräumen.
Bestimmen Sie Basen von den folgenden Untervektorräumen U_K des K^3:

1. $K = \mathbb{R}$ und $U_{\mathbb{R}} = \text{span}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\right)$.
2. $K = \mathbb{C}$ und $U_{\mathbb{C}} = \text{span}\left(\begin{pmatrix}2+i\\1\\i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\2\\2i+1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\i\\0\end{pmatrix}\right)$.
3. $K = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ und $U_{\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}} = \text{span}\left(\begin{pmatrix}[2]\\[3]\\[0]\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}[3]\\[5]\\[2]\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}[0]\\[3]\\[5]\end{pmatrix}\right)$.

LÖSUNG:

1. Gesucht ist eine Basis des Untervektorraums

$$U_{\mathbb{R}} = \text{ span }\left(v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} v_3 = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} v_4 = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} v_5 = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} v_6 = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\right)$$

des $\mathbb{R}^3$

Wir vermuten, dass die ersten 3 Vektoren linear unabhängig sind und zeigen, dass die Vektorgleichung:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

als einzige Lösung nur die Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ hat.

Dazu müssen wir das lineare Gleichungssystem (aus den Komponenten der Vektorgleichung)

$$\begin{array}{rrrrl} (I) & \lambda_1 & + \quad \lambda_2 & + 2\,\lambda_3 & = \; 0 \\ (II) & 2\,\lambda_1 & + 3\,\lambda_2 & + \quad \lambda_3 & = \; 0 \\ (III) & 3\,\lambda_1 & + 2\,\lambda_2 & + 3\,\lambda_3 & = \; 0 \end{array}$$

lösen. Die Gleichung (II) lässt sich zu $\lambda_3 = -2\lambda_1 - 3\lambda_2$ umformen. Einsetzen dieses Ergebnisses in die Gleichungen (I) und (III) ergibt $(I') \; -3\lambda_1 - 5\lambda_2 = 0$ und $(III') \; -3\lambda_1 - 7\lambda_2 = 0$. Gleichsetzen dieser beiden Gleichungen ergibt $-5\lambda_2 = -7\lambda_2$, woraus $\lambda_2 = 0$ folgt. Einsetzen in (I') und (III') ergibt $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_3 = 0$. (Einsetz- und Gleichsetzverfahren)

Somit ist $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ die einzige Lösung des linearen Gleichungssystem. Damit sind die drei Vektoren linear unabhängig und bilden eine Basis von $U_{\mathbb{R}}$, da die übrigen Vektoren als Linearkombinationen der ersten drei geschrieben werden können.

Beweis: 1. Weg direkt

Wir lösen die folgenden 3 Gleichungen simultan durch Zeilenumformungen:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} \mathit{oder} \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} \mathit{oder} \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$$

liefert lineares Gleichungssystem (komponentenweise)

$$\begin{array}{rlllll}
(I) & 1\,\lambda_1 & +1\,\lambda_2 & +2\,\lambda_3 & = & 2\quad 3\quad 3 \\
(II) & 2\,\lambda_1 & +3\,\lambda_2 & +1\,\lambda_3 & = & 3\quad 1\quad 2 \quad |-2\cdot(I) \\
(III) & 3\,\lambda_1 & +2\,\lambda_2 & +3\,\lambda_3 & = & 1\quad 2\quad 1 \quad |-3\cdot(I)
\end{array}$$

(Vorwärtsschritt)

$$\begin{array}{rlllllll}
(I') & 1\,\lambda_1 & +\quad 1\,\lambda_2 & +\quad 2\,\lambda_3 & = & 2 & 3 & 3 \\
(II') & 0\,\lambda_1 & +\quad 1\,\lambda_2 & +(-3)\,\lambda_3 & = & -1 & -5 & -4 \\
(III') & 0\,\lambda_1 & +(-1)\,\lambda_2 & +(-3)\,\lambda_3 & = & -5 & -7 & -8 \quad |+1\cdot(II')
\end{array}$$

$$\begin{array}{rlllllll}
(I'') & 1\,\lambda_1 & +1\,\lambda_2 & +\quad 2\,\lambda_3 & = & 2 & 3 & 3 \quad |-2\cdot(III*) \\
(II'') & 0\,\lambda_1 & +1\,\lambda_2 & +(-3)\,\lambda_3 & = & -1 & -5 & -4 \quad |+3\cdot(III*) \\
(III'') & 0\,\lambda_1 & +0\,\lambda_2 & +(-6)\,\lambda_3 & = & -6 & -12 & -12 \quad |/-6 \\
(III*) & 0\,\lambda_1 & +0\,\lambda_2 & +\quad 1\,\lambda_3 & = & 1 & 2 & 2
\end{array}$$

(Rückwärtsschritt)

$$\begin{array}{rlllllll}
(I''') & 1\,\lambda_1 & +1\,\lambda_2 & +0\,\lambda_3 & = & 0 & -1 & -1 \quad |-1\cdot(II''') \\
(II''') & 0\,\lambda_1 & +1\,\lambda_2 & +0\,\lambda_3 & = & 2 & 1 & 2 \\
(III''') & 0\,\lambda_1 & +0\,\lambda_2 & +1\,\lambda_3 & = & 1 & 2 & 2
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllccc}
1\,\lambda_1 & +0\,\lambda_2 & +0\,\lambda_3 & = & -2 & -2 & -3 \\
0\,\lambda_1 & +1\,\lambda_2 & +0\,\lambda_3 & = & 2 & 1 & 2 \\
0\,\lambda_1 & +0\,\lambda_2 & +1\,\lambda_3 & = & 1 & 2 & 2
\end{array}$$

Damit gilt: $v_4 = -2\cdot v_1 + 2\cdot v_2 + 1\cdot v_3,\ v_5 = -2\cdot v_1 + 1\cdot v_2 + 2\cdot v_3;\ v_6 = -3\cdot v_1 + 2\cdot v_2 + 2\cdot v_3$

Beweis: 2. Weg indirekt mit Hilfe eines Satzes aus der Vorlesung:
$U_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^3$ kann höchstens von 3 linear unabhängigen Vektoren aufgespannt werden, folglich sind die übrigen Vektoren Linearkombinationen der ersten drei.

2. Wir zeigen, dass die drei Vektoren linear abhängig sind, insbesondere dass der mittlere Vektor eine Linearkombination der beiden anderen Vektoren ist. Der Ansatz

$$\alpha\cdot\begin{pmatrix}2+i\\1\\i\end{pmatrix} + \beta\cdot\begin{pmatrix}1\\i\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\2\\2i+1\end{pmatrix}$$

liefert aus 3. Komponente: $\alpha = \frac{2i+1}{i} = 2-i$, aus 2. Komponente: $\beta = \frac{2-\alpha}{i} = \frac{2-2+i}{i} = 1$, wobei α und β auch die 1. Komponente erfüllen: $\alpha\cdot(2+i)+\beta\cdot 1 = (2-i)\cdot(2+i)+1 = 4+1+1 = 6$. Demnach ist

$$U_{\mathbb{C}} = \text{span}\left(\begin{pmatrix}2+i\\1\\i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\i\\0\end{pmatrix}\right),$$

wobei die beiden Vektoren linear unabhängig sind, also eine Basis von $U_{\mathbb{C}}$ bilden, weil für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ aus dem Ansatz

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \alpha\cdot\begin{pmatrix}2+i\\1\\i\end{pmatrix} + \beta\cdot\begin{pmatrix}1\\i\\0\end{pmatrix}$$

folgt, dass zuerst (wegen der 3. Komponente) $\alpha = 0$ sein muss, und dann (z.B. wegen der 2. Komponente) $\beta = 0$ sein muss.

3. Wir überprüfen die lineare Unabhängigkeit der drei Vektoren. Für $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ gelte

$$\alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} [2] \\ [3] \\ [0] \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} [3] \\ [5] \\ [2] \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} [0] \\ [3] \\ [5] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0] \\ [0] \\ [0] \end{pmatrix} .$$

Ausgeschrieben in drei Gleichungen (komponentenweise) lautet dies

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & [2]\alpha_1 + [3]\alpha_2 + [0]\alpha_3 = [0] \ , \\ \text{(II)} & [3]\alpha_1 + [5]\alpha_2 + [3]\alpha_3 = [0] \ , \\ \text{(III)} & [0]\alpha_1 + [2]\alpha_2 + [5]\alpha_3 = [0] \ . \end{array}$$

Wir lösen das Gleichungssystem durch äquivalente Zeilenumformungen. Zunächst wird (II) durch (II') $= 2 \cdot$ (II) $- 3 \cdot$ (I) ersetzt,

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & [2]\alpha_1 + [3]\alpha_2 + [0]\alpha_3 = [0] \ , \\ \text{(II')} & [0]\alpha_1 + [1]\alpha_2 + [6]\alpha_3 = [0] \ , \\ \text{(III)} & [0]\alpha_1 + [2]\alpha_2 + [5]\alpha_3 = [0] \ . \end{array}$$

Nun ersetzen wir noch (III) durch (III') $=$ (III) $- 2 \cdot$ (II'), wodurch sich

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & [2]\alpha_1 + [3]\alpha_2 + [0]\alpha_3 = [0] \ , \\ \text{(II')} & [0]\alpha_1 + [1]\alpha_2 + [6]\alpha_3 = [0] \ , \\ \text{(III')} & [0]\alpha_1 + [0]\alpha_2 + [-7]\alpha_3 = [0] \end{array}$$

ergibt. Da in $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ $[-7] = [0]$ ist, kann $\alpha_3 \neq [0]$, also zum Beispiel $\alpha_3 = [1]$ gewählt werden. Die drei Vektoren sind also linear abhängig.

Somit bilden die beiden Vektoren $\begin{pmatrix} [2] \\ [3] \\ [0] \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} [3] \\ [5] \\ [2] \end{pmatrix}$ eine Basis von $U_{\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}}$, da sie offensichtlich linear unabhängig sind, vgl. Nachweis der Linearen Unabhängigkeit in 2.

Den dritten Vektor erhält man wie folgt als eine Linearkombination dieser beiden Basisvektoren:

Mit $\alpha_3 = [1]$ folgt in $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ aus (II') : $\alpha_2 = -[6]\alpha_3 = [-6]\alpha_3 = [1]\alpha_3 = \alpha_3 = [1]$

und aus (I) : $\alpha_1 = \dfrac{-[3]}{[2]}\alpha_2 = \dfrac{[-3]}{[2]}\alpha_2 = \dfrac{[4]}{[2]}\alpha_2 = [2]\alpha_2 = [2].$

(Wegen $[2] \cdot [4] = [1]$ hätte man den Bruch auch mit [4] erweitern können).

Damit gilt nach obigem Ansatz aufgelöst nach dem dritten Vektor:

$$\begin{pmatrix} [0] \\ [3] \\ [5] \end{pmatrix} = (-[2]) \cdot \begin{pmatrix} [2] \\ [3] \\ [0] \end{pmatrix} + (-[1]) \cdot \begin{pmatrix} [3] \\ [5] \\ [2] \end{pmatrix} = [5] \cdot \begin{pmatrix} [2] \\ [3] \\ [0] \end{pmatrix} + [6] \cdot \begin{pmatrix} [3] \\ [5] \\ [2] \end{pmatrix} .$$

Probe durch Nachrechnen !

Bemerkung: Mit $\alpha_3 = [-1]$ folgt aus (II') direkt: $\alpha_2 = -[6]\alpha_3 = [-6] \cdot [-1] = [6]$

und aus (I) direkt: $\alpha_1 = \dfrac{-[3]}{[2]}\alpha_2 = \dfrac{[-3] \cdot [6]}{[2]} = \dfrac{[-18]}{[2]} = [-9] = [5].$

H 67. Konvexe Hülle

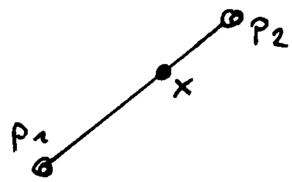
Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt genau dann **konvex**, wenn für alle Punkte $p, q \in M$ die Verbindungsstrecke $\overline{pq} = \{\lambda p + \mu q \mid \lambda, \mu \geq 0 \quad \wedge \quad \lambda + \mu = 1\}$ in M liegt.

Die kleinste konvexe Menge, die alle Elemente einer Menge M enthält, heißt **konvexe Hülle** $H(M)$ von M.

Zeigen Sie: Für die konvexe Hülle von k Punkten $p_1, ..., p_k \subset \mathbb{R}^n$ gilt:

$$H(p_1, ..., p_k) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot p_i \quad \wedge \quad \lambda_i \geq 0 \ \forall i \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1\}$$

Beweis: Induktion nach $k \in \mathbb{N}$



Ind. Anfang $k=2$: $x \in H(p_1, p_2) = \overline{p_1 p_2}$ (Strecke)

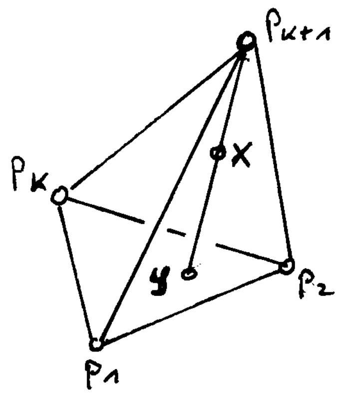
$\Leftrightarrow x = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$ mit $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ und $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$

Bem: Mit $\lambda_2 = \lambda$ und $\lambda_1 = 1-\lambda$ gilt $x = (1-\lambda)p_1 + \lambda p_2 = p_1 + \lambda(p_2 - p_1)$, $0 \leq \lambda \leq 1$ klar

Ind. Schritt $k \to k+1$ unter Ind. Annahme:

Jeder Punkt $y \in H(p_1, ..., p_k)$ hat die Darstellung

$y = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i$, $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$



$\Rightarrow x \in H(p_1, p_2, ..., p_k, p_{k+1})$ vgl. Figur

$\Leftrightarrow \exists\, y \in H(p_1, ..., p_k) : x \in H(y, p_{k+1})$

$\Leftrightarrow x = (1-\mu) y + \mu p_{k+1}$, $0 \leq \mu \leq 1$

$\Leftrightarrow x = (1-\mu)\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i\right) + \mu p_{k+1}$, $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, $0 \leq \mu \leq 1$

$\Leftrightarrow x = \sum_{i=1}^{k+1} \mu_i p_i$ mit $0 \leq \mu_i := \begin{cases} (1-\mu)\lambda_i & \text{für } i = 1, ..., k \\ \mu & \text{für } i = k+1 \end{cases}$

und $\sum_{i=1}^{k+1} \mu_i = \sum_{i=1}^{k} (1-\mu)\lambda_i + \mu = (1-\mu)\sum_{i=1}^{k} \lambda_i + \mu = 1 - \mu + \mu = 1$ qed.

H 68. Auf Kollisionskurs ?
Im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ sei ein Dreieck ΔABC (Target) durch die Koordinaten der Eckpunkte $A = (-2, 0, -1)$, $B = (4, 4, -1)$ und $C = (-2, 4, 3)$ sowie die Position $P = (5, -1, 0)$ eines Elektrons gegeben, das in Richtung $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ fliegt. Trifft das Elektron das Target ΔABC ?

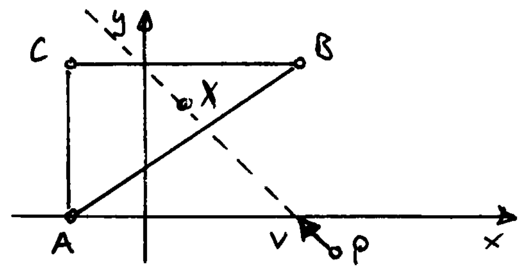
Mit $a = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, p = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt nach H67 für das Target $T = \Delta ABC$:

$$T = \{ \lambda a + \mu b + \tau c \mid 0 \le \lambda, \mu, \tau \ \wedge \ \lambda + \mu + \tau = 1 \}$$

Setze $\lambda = 1 - \mu - \tau \Rightarrow 0 \le \mu, \tau$ und $\mu + \tau = 1 - \lambda \le 1 \Rightarrow$

$$T \ni x = (1 - \mu - \tau) a + \mu b + \tau c = a + \mu (b - a) + \tau (c - a) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Suche nach Schnittpunkt der Bahn des Elektrons (Gerade) $x = p + \sigma v$, $\sigma \in \mathbb{R}^+$ und dem Target T führt auf das LGS:



Ansicht aus z-Richtung!

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \mu \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} (1) & 6\mu + \sigma = 7 \\ (2) & 4\mu + 4\tau - \sigma = -1 \\ (3) & 4\tau = 1 \end{array} \Rightarrow \underline{\tau = \tfrac{1}{4}}$$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{ll} (1') & 6\mu + \sigma = 7 \\ (2') & 4\mu - \sigma = -2 \end{array}\right\} \overset{(1')+(2')}{\Rightarrow} 10\mu = 5 \Rightarrow \underline{\mu = \tfrac{1}{2}} \text{ und } \underline{\sigma = 4}$$

Wegen $0 \le \tau = \frac{1}{4}$, $0 \le \mu = \frac{1}{2}$ und $\mu + \tau = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} < 1$ trifft das Elektron das Target T im Punkt $(1, 3, 0) = X$

$$x = p + \sigma v = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

H 69. Lehrsätze aus der ebenen Geometrie — Eben!

Beweisen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung folgende Lehrsätze aus der ebenen Geometrie:

1. Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt. (Eine "Seitenhalbierende" eines Dreiecks ist die Gerade durch den Mittelpunkt einer Dreiecksseite und deren gegenüberliegenden Eckpunkt.)

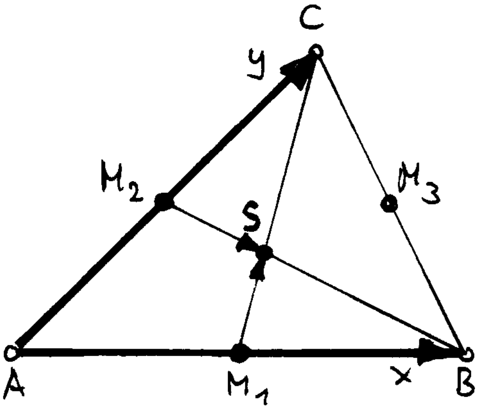
   Hinweis: Verwenden Sie den Vektor x zwischen den Eckpunkten A und B des Dreiecks und den Vektor y zwischen den Eckpunkten A und C des Dreiecks.

2. Die Seitenhalbierenden schneiden sich im Verhältnis 2 : 1.

3. Die Seitenmittelpunkte eines (beliebigen) Vierecks bilden die Ecken eines Parallelogramms.

   Hinweis: Fertigen Sie zur Unterstützung der Beweisführung Skizzen an.

1.



Die Vektoren (Koordinaten) zu den Punkten A, B, C bezeichnen wir mit a, b, c und erhalten nach Vorlesung mit

$m_1 = \frac{1}{2}(a+b)$, $m_2 = \frac{1}{2}(a+c)$, $m_3 = \frac{1}{2}(b+c)$

die Vektoren (Koordinaten) zu den Mittelpunkten M_1, M_2, M_3 der Dreiecksseiten, vgl. Skizze.

Unter Verwendung der Vektoren $x = \vec{AB} = b-a$ und $y = \vec{AC} = c-a$ gilt:

$m_1 = a + \frac{1}{2}x$, $m_2 = a + \frac{1}{2}y$, $m_3 = a + \frac{1}{2}(x+y)$.

Für den Schnittpunkt S der Seitenhalbierenden M_1C und M_2B gilt

einerseits: $s = a + \frac{1}{2}x + \lambda\cdot(y - \frac{1}{2}x) = a + \frac{1}{2}(1-\lambda)x + \lambda y$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$

$\vec{M_1C} = y - \frac{1}{2}x$ $\quad$ $\vec{M_2B} = x - \frac{1}{2}y$ $\quad$ (geeignet gewählt)

andererseits: $s = a + \frac{1}{2}y + \mu\cdot(x - \frac{1}{2}y) = a + \mu x + \frac{1}{2}(1-\mu)y$ mit $\mu \in \mathbb{R}$

Differenz der beiden Vektorgleichungen liefert nach Ordnen nach x, y:

$\frac{1}{2}(1-\lambda-2\mu)\cdot x + \frac{1}{2}(2\lambda-1+\mu)\cdot y = 0$ ← Nullvektor

Da die Vektoren x, y bei einem (echten) Dreieck linear unabhängig sind, ist diese Gleichung genau dann erfüllt, wenn

(1) $1-\lambda-2\mu = 0 \Rightarrow \lambda = 1-2\mu$ (1')

(2) $2\lambda-1+\mu = 0 \overset{(1')}{\Leftrightarrow} 2-4\mu-1+\mu = 0 \Leftrightarrow \mu = \frac{1}{3} \overset{(1')}{\Rightarrow} \lambda = 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \underline{\underline{s}} = a + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y = a + \frac{1}{3}(b-a) + \frac{1}{3}(c-a) = \underline{\underline{\frac{1}{3}(a+b+c)}}$

Der Schnittpunkt S von M_1C und M_2B liegt auch auf M_3A, da

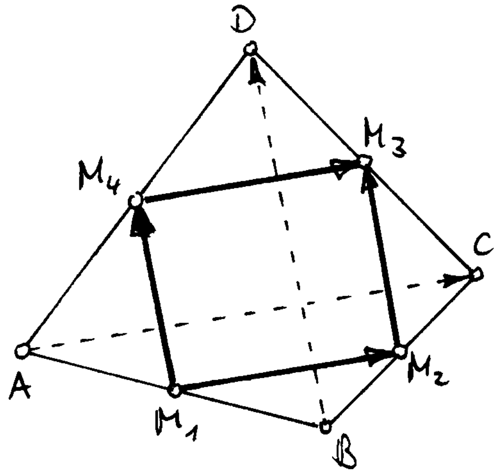
<u>1. Weg:</u> $\vec{AS} = s-a = \frac{1}{3}(x+y) = \frac{2}{3}\vec{AM_3}$ qed (*)

<u>2. Weg:</u> $s = \frac{1}{3}(a+b+c)$ ist zyklisch in a, b, c, d.h. unabhängig

von der Wahl der Bezeichnung der 3 Ecken ⇒ liegt S auf einer Seitenhalbierenden, dann auf allen!

2. Vergleiche (*) in 1.

3.



Die Vektoren (Koordinaten) zu den Punkten A, B, C, D des Vierecks bezeichnen wir mit a, b, c, d und erhalten wie oben mit $m_1 = \frac{1}{2}(a+b)$, $m_2 = \frac{1}{2}(b+c)$, $m_3 = \frac{1}{2}(c+d)$, $m_4 = \frac{1}{2}(d+a)$ die Vektoren (Koordinaten) zu den Mittelpunkten M_1, M_2, M_3, M_4 der Vierecksseiten, vgl. Skizze.

Um Aussagen über die gegenseitige Lage der Seiten des Vierecks $\square M_1M_2M_3M_4$ zu erhalten, betrachten wir folgende Differenz-Vektoren

$\overrightarrow{M_1M_2} = m_2 - m_1 = \frac{1}{2}(b+c) - \frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{2}(c-a)$

$\overrightarrow{M_2M_3} = m_3 - m_2 = \frac{1}{2}(c+d) - \frac{1}{2}(b+c) = \frac{1}{2}(d-b)$

$\overrightarrow{M_4M_3} = m_3 - m_4 = \frac{1}{2}(c+d) - \frac{1}{2}(d+a) = \frac{1}{2}(c-a) = \overrightarrow{M_1M_2}$ $\left(= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$

$\overrightarrow{M_1M_4} = m_4 - m_1 = \frac{1}{2}(d+a) - \frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{2}(d-b) = \overrightarrow{M_2M_3}$ $\left(= \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\right)$

⇒ $\square M_1M_2M_3M_4$ ist ein Parallelogramm!