TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR.DR. JÜRGEN RICHTER-GEBERT, DR. HERMANN VOGEL

Lineare Algebra und analytische Geometrie 1 & Mathematik für Physiker 1 (WS 2007/08)
— Aufgabenblatt 08 (17. Dezember 2007) —

— Präsenzaufgaben —

P 61. Linearkombinationen von Vektoren
Gegeben sei folgende Menge M von 6 Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_6 \in \mathbb{R}^4$:

$$M = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad v_6 = \begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix} \right\}$$

1. Zeigen Sie, dass sich jeder Vektor $v_i \in M$, $i = 1, 2, \ldots, 6,$ als Linearkombination der anderen Vektoren aus $M \backslash \{v_i\}$ schreiben lässt.
2. Zeigen Sie, dass gilt: $\text{span}(v_2, v_5, v_6) = \text{span}(v_3, v_5, v_6)$.
3. Geben Sie eine Basis des von M aufgespannten Untervektorraums des $\mathbb{R}^4$ an.
4. Betrachten Sie für $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6 \in \mathbb{R}$ die Vektorgleichung (Linearkombinationen des Nullvektors $0 \in \mathbb{R}^4$):

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 + \lambda_4 \cdot v_4 + \lambda_5 \cdot v_5 + \lambda_6 \cdot v_6 = 0.$$

Zeigen Sie, dass die Menge $K := \left\{ (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6) \in \mathbb{R}^6 \;\middle|\; \sum_{i=1}^{6} \lambda_i \cdot v_i = 0 \right\}$ aller Vektoren $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6) \in \mathbb{R}^6$, welche die obige Vektorgleichung erfüllen, ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^6$ ist.

P 62. Basen von $\mathbb{Z}_2^3$.

1. Geben Sie alle Elemente von $\mathbb{Z}_2^3$ an und begründen Sie, warum $\mathbb{Z}_2^3$ bezüglich der komponentenweisen Addition und skalaren Multiplikation ein $\mathbb{Z}_2$-Vektorraum ist.
2. Geben Sie mindestens zwei verschiedene Basen von $\mathbb{Z}_2^3$ an. Wieviele verschiedene Basen gibt es?
3. Geben Sie alle Untervektorräume von $\mathbb{Z}_2^3$ an.

P 63. Lineare Unabhängigkeit

1. Zeigen Sie, dass die Menge $M := \{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ der Monome x^n über $\mathbb{R}$ linear unabhängig ist und damit eine Basis des Vektorraums der Polynome bildet.
2. (a) Zeigen Sie, dass die Menge $L := \{\ln(p) \mid p \,\text{prim}\} \subset \mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$ linear unabhängig ist.
   (b) Zeigen Sie, dass $\ln(1 + \sqrt{2})$ nicht im Spann von L liegt - die Menge L ist also keine $\mathbb{Q}$-Basis von $\mathbb{R}$.

— *Zentrale Präsenzaufgaben* —

P 64. Basiswechsel konkret.
Gegeben seien die drei Einheitsvektoren $e_1,\ e_2,\ e_3 \in \mathbb{R}^3$ sowie drei weitere Vektoren $v_1,\ v_2,\ v_3 \in \mathbb{R}^3$:

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \ ,\quad e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \ ,\quad e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \ ,\qquad v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \ ,\quad v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \ ,\quad v_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}.$$

1. Die Standardbasis des $\mathbb{R}$–Vektorraums $\mathbb{R}^3$ besteht aus den drei Einheitsvektoren $e_1,\ e_2,\ e_3 \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass die Vektoren $v_1,\ v_2,\ v_3 \in \mathbb{R}^3$ ebenfalls eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden, und stellen Sie die Einheitsvektoren $e_1,\ e_2,\ e_3$ als Linearkombinationen der Vektoren der Basis $\{v_1, v_2, v_3\}$ dar.
2. Gegeben seien nun die drei Vektoren $p = \begin{pmatrix}6\\3\\9\end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}$ und $s = \begin{pmatrix}s_1\\s_2\\s_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

   Stellen Sie die drei Vektoren p, q und s jeweils

   (a) als Linearkombination der Vektoren der Standardbasis $\{e_1, e_2, e_3\}$ dar und

   (b) als Linearkombination der Vektoren der Basis $\{v_1, v_2, v_3\}$ dar.

— *Hausaufgaben* —

H 65. Ganz schön span(n)end.
Gegeben sei folgende Menge M von 6 Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_6 \in \mathbb{R}^4$ aus Aufgabe P 61:

$$M = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix} \ ,\quad v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \ ,\quad v_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} \ ,\quad v_4 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \ ,\quad v_5 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \ ,\quad v_6 = \begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix} \right\}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr ?

☐ $\operatorname{span}(v_2, v_3, v_5) = \operatorname{span}(v_3, v_5)$

☐ $\operatorname{span}(v_2, v_3, v_5) = \operatorname{span}(v_1, v_3, v_5)$

☐ $\operatorname{span}(v_1, v_5, v_6) = \operatorname{span}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$

☐ $\operatorname{span}(v_1, v_2, v_4) = \operatorname{span}(v_2, v_3, v_5, v_6)$

H 66. Basen von Untervektorräumen.
Bestimmen Sie Basen von den folgenden Untervektorräumen U_K des K^3:

1. $K = \mathbb{R}$ und $U_{\mathbb{R}} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} \right)$.
2. $K = \mathbb{C}$ und $U_{\mathbb{C}} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}2+i\\1\\i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\2\\2i+1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\i\\0\end{pmatrix} \right)$.
3. $K = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ und $U_{\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}[2]\\ [3]\\ [0]\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}[3]\\ [5]\\ [2]\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}[0]\\ [3]\\ [5]\end{pmatrix} \right)$.

H 67. Konvexe Hülle
Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt genau dann **konvex**, wenn für alle Punkte $p, q \in M$ die Verbindungsstrecke $\overline{pq} = \{\lambda p + \mu q \,|\, \lambda, \mu \geq 0 \quad \wedge \quad \lambda + \mu = 1\}$ in M liegt.
Die kleinste konvexe Menge, die alle Elemente einer Menge M enthält, heißt **konvexe Hülle** $H(M)$ von M.

Zeigen Sie: Für die konvexe Hülle von k Punkten $p_1, ..., p_k \subset \mathbb{R}^n$ gilt:

$$H(p_1, ..., p_k) = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot p_i \quad \wedge \quad \lambda_i \geq 0 \;\; \forall i \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1\}$$

.

H 68. Auf Kollisionskurs ?
Im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ sei ein Dreieck ΔABC (Target) durch die Koordinaten der Eckpunkte $A = (-2, 0, -1), B = (4, 4, -1)$ und $C = (-2, 4, 3)$ sowie die Position $P = (5, -1, 0)$ eines Elektrons gegeben, das in Richtung $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ fliegt. Trifft das Elektron das Target ΔABC ?

H 69. Lehrsätze aus der ebenen Geometrie — Eben!
Beweisen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung folgende Lehrsätze aus der ebenen Geometrie:

1. Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt. (Eine "Seitenhalbierende" eines Dreiecks ist die Gerade durch den Mittelpunkt einer Dreiecksseite und deren gegenüberliegenden Eckpunkt.)

   Hinweis: Verwenden Sie den Vektor x zwischen den Eckpunkten A und B des Dreiecks und den Vektor y zwischen den Eckpunkten A und C des Dreiecks.

2. Die Seitenhalbierenden schneiden sich im Verhältnis $2 : 1$.

3. Die Seitenmittelpunkte eines (beliebigen) Vierecks bilden die Ecken eines Parallelogramms.

   Hinweis: Fertigen Sie zur Unterstützung der Beweisführung Skizzen an.

Abgabetermin ist der 14.01.2008 bis 12:00 Uhr (Einwurfkasten im Untergeschoss des FMI-Gebäudes).

sing* We wish you a MERRY CHRISTMAS *sing* We wish you a MERRY CHRISTMAS *sing
sing* We wish you a MERRY CHRISTMAS *sing* and a HAPPY NEW YEAR !!! *sing