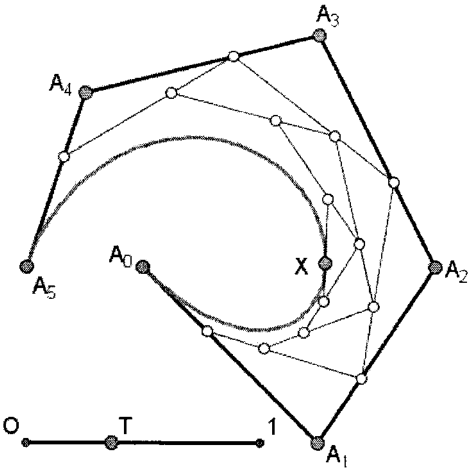
Z 52. De-Casteljau-Algorithmus für Bezier-Kurven



In einem xy-Koordinatensystem seien $n+1$ Punkte $A_0 = (x_0, y_0), \ldots, A_n = (x_n, y_n), n \in \mathbb{N}$ gegeben, die einen Streckenzug $A_0 \ldots A_n$ mit n Strecken festlegen, sowie ein Wert $t \in [0,1]$.

1. Zeigen Sie, dass die Punkte $A_i^1 := (1-t) \cdot A_i + t \cdot A_{i+1}$ für $i = 0, \ldots, n-1$ die Strecken (A_i, A_{i+1}) im Verhältnis $t : (1-t)$ teilen und somit für ein festes t einen Streckenzug $A_0^1 \ldots A_{n-1}^1$ mit $n-1$ Strecken bilden.

Führt man dies iterativ fort, so erhält man für $r = 2, \ldots, n$ mit

$$A_i^r := (1-t) \cdot A_i^{r-1} + t \cdot A_{i+1}^{r-1}, \; i = 0, \ldots, n-r$$

schließlich einen Punkt $X(t) := A_0^n$ zum Parameter $t \in [0,1]$.

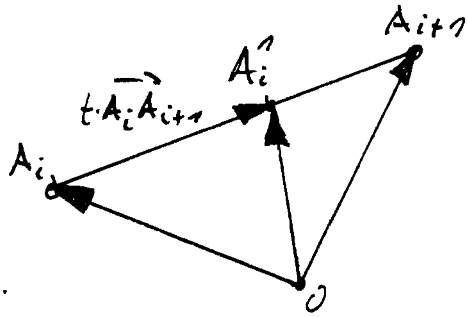
Durchläuft nun t das Intervall $[0,1]$, so beschreibt $X(t)$ eine Bezier-Kurve c, die von den Punkten $A_0, \ldots, A_n$ abhängt. Man nennt die Punkte $A_0, \ldots, A_n$ daher Kontrollpunkte von c.

2. Begründen Sie, warum die Kontrollpunkte A_0 und A_n Anfangs- und Endpunkt der Kurve c sind.
3. Begründen Sie, warum die Koordinaten von $X(t) = (x(t), y(t))$ Polynome in t höchstens vom Grad n sind.
4. Bestimmen Sie $X(t)$ für $n = 2$ und $n = 3$. Welche Vermutung ergibt sich für allgemeines n ?

1. $\overrightarrow{A_i A_i^1} = A_i^1 - A_i = (1-t)A_i + t \cdot A_{i+1} - A_i = t \cdot (A_{i+1} - A_i) = t \cdot \overrightarrow{A_i A_{i+1}}$

$\overrightarrow{A_i^1 A_{i+1}} = A_{i+1} - A_i^1 = A_{i+1} - (1-t)A_i - t \cdot A_{i+1} = (1-t) \cdot (A_{i+1} - A_i) = (1-t) \cdot \overrightarrow{A_i A_{i+1}}$

$\Rightarrow A_i^1$ liegt auf der Strecke (A_i, A_{i+1}) und teilt diese im Verhältnis $t : (1-t)$



Bem: Wir identifizieren die Koordinaten der Punkte mit Vektoren von O zu den Punkten.

2. Iteration nach de Casteljau

	1. Stufe	2. Stufe	3. Stufe
$A_0^0 = A_0$			
$A_1^0 = A_1$	$A_0^1 = (1-t) A_0^0 + t \cdot A_1^0$		
$A_2^0 = A_2$	$A_1^1 = (1-t) A_1^0 + t \cdot A_2^0$	$A_0^2 = (1-t) \cdot A_0^1 + t \cdot A_1^1$	
$A_3^0 = A_3$	$A_2^1 = (1-t) A_2^0 + t A_3^0$	$A_1^2 = (1-t) \cdot A_1^1 + t \cdot A_2^1$	$A_0^3 = (1-t) \cdot A_0^2 + t \cdot A_1^2$ …
⋮	⋮	⋮	⋮

\ bedeutet Multiplikation mit $(1-t)$

— bedeutet Multiplikation mit t

Dieses Verfahren lässt sich fortsetzen für mehr als vier Kontrollpunkten.

Für $t = 0$ erhält man $A_0^1 = A_0$, $A_0^2 = A_0^1 = A_0$, $A_0^3 = A_0^2 = A_0 \Rightarrow A_0^n = A_0 = X(0)$

Für $t = 1$ erhält man $A_{n-1}^1 = A_n$, $A_{n-2}^2 = A_{n-1}^1 = A_n$, $A_{n-3}^3 = A_{n-2}^2 = A_n$

$\Rightarrow A_0^n = A_n = X(1)$ (betrachte letzte Zeile des Alg.)

3. Sukzessives Einsetzen liefert in 2. Stufe

$$A_0^2 = (1-t)\cdot A_0^1 + t\cdot A_1^1 = (1-t)^2 A_0 + 2\cdot(1-t)\cdot t\cdot A_1 + t^2\cdot A_2$$

$$A_1^2 = (1-t)\cdot A_1^1 + t\cdot A_2^1 = (1-t)^2 A_1 + 2\cdot(1-t)\cdot t\cdot A_2 + t^2\cdot A_3$$

und in 3. Stufe

$$A_0^3 = (1-t)\cdot A_0^2 + t\cdot A_1^2 =$$

$$= (1-t)^3 A_0 + 3\cdot(1-t)^2 t\, A_1 + 3\cdot(1-t)\cdot t^2\cdot A_2 + t^3 A_3$$

d.h. In n-ter Stufe erhält man in x und y Komponente von A_0^n Polynome in t vom Grad n, da bei jedem Schritt ein Faktor t dazukommt.

4. Speziell gilt:

für $n=2$: $X(t) = A_0^2 = (1-t)^2 A_0 + 2\cdot(1-t)\cdot t\cdot A_1 + t^2\cdot A_2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k}(1-t)^{2-k} t^k A_k$

für $n=3$: $X(t) = A_0^3 = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k}(1-t)^{3-k} t^k A_k$

allgemein: $X(t) = A_0^n = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{k}(1-t)^{n-k} t^k}_{= B_k^n(t) \text{ Bernstein-Polynome}} A_k$

Mit binomischer Formel gilt: $1 = [t+(1-t)]^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k \cdot (1-t)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} B_k^n(t)$

Bem: Die Bernstein-Polynome stehen unter Bernoulli-Kette in jeder Schulformelsammlung.

Beachte: Interaktive Figuren zu Bézier-Kurven auf der Homepage zu Lin Alg.

Aufgabe 53. Axiomatisch richtig?
Welche der folgenden Aussagen gelten in einem Vektorraum V über einem Körper K?

☐ $(V\backslash\{0\},\cdot)$ ist kommutative Gruppe.

☐ $(K,\cdot)$ ist kommutative Gruppe.

☐ $\forall\lambda,\mu\in K, \forall v\in V$ gilt $(\lambda\mu)v=\mu(\lambda v)$.

☐ $\forall\lambda,\mu\in K, \forall v\in V$ gilt $\lambda(v+\mu)=\lambda v+\lambda\mu$.

☐ $\forall\lambda\in K, \forall v,w\in V$ gilt $\lambda(v+w)=\lambda v+\lambda w$.

☐ $\forall\lambda\in K, \forall v\in V$ gilt $\lambda v=v\lambda$.

☐ $\forall\lambda,\mu\in K, \forall v\in V$ gilt $(\lambda+\mu)v=\lambda v+\mu v$.

☐ $\forall v\in V$ gilt $(-1)v=-v$.

Wie lauten die richtig angegebenen Beziehungen unter Verwendung unterschiedlicher Verknüpfungszeichen für $(V,+_v,\cdot_v)$ und $(K,+,\cdot)$.

<u>LÖSUNG:</u>

☐ $(V\backslash\{0\},\cdot_v)$ ist kommutative Gruppe. (in V gibt es keine Multiplikation $V\times V\to V$)

☐ $(K,\cdot)$ ist kommutative Gruppe. ($0\in K$ besitzt in K kein inverses Element)

☒ $\forall\lambda,\mu\in K, \forall v\in V$ gilt $(\lambda\cdot\mu)\cdot_v v=\mu\cdot_v(\lambda\cdot_v v)$.

☐ $\forall\lambda,\mu\in K, \forall v\in V$ gilt $\lambda(v+\mu)=\lambda v+\lambda\mu$. (Vektor + Skalar nicht definiert)

☒ $\forall\lambda\in K, \forall v,w\in V$ gilt $\lambda\cdot_v(v+_v w)=\lambda\cdot_v v+_v\lambda\cdot_v w$.

☐ $\forall\lambda\in K, \forall v\in V$ gilt $\lambda\cdot_v v=v\lambda$. (Vektor · Skalar (von rechts) nicht definiert)

☒ $\forall\lambda,\mu\in K, \forall v\in V$ gilt $(\lambda+\mu)\cdot_v v=\lambda\cdot_v v+_v\mu\cdot_v v$.

☒ $\forall v\in V$ gilt $(-1)\cdot_v v=-_v v$. ($v+_v(-1)\cdot_v v=1\cdot_v v+_v(-1)\cdot_v v=(1+(-1))\cdot_v v=0\cdot_v v=0_v$
$\Rightarrow(-1)\cdot_v v=-_v v$ ist das additiv Inverse zu v)

Aufgabe 54. Unitäres Gesetz
Zeigen Sie durch Angabe eines nicht trivialen Gegenbeispiels:
Das unitäre Gesetz: $\forall \vec{x} \in V \wedge 1 \in K: \quad 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$ ist unabhängig von den übrigen Vektorraumaxiomen (d.h. das unitäre Gesetz folgt nicht aus den übrigen Vektorraumaxiomen).

LÖSUNG:

Wir zeigen, dass es eine Menge M mit einer inneren Verknüpfung $+ : M \times M \longrightarrow M$ und einer Äußeren Verknüpfung $\cdot : K \times M \longrightarrow M$ (K ein Körper) gibt, welche sämtliche Vektorraumaxiome bis auf das unitäre Gesetz erfüllt.
Wähle $M = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$, die Addition $+_v : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ und die skalaren Multiplikation $\cdot_v : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $(\lambda, (x, y)) \mapsto (\lambda \cdot x, 0) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt:

$(\mathbb{R}^2, +)$ ist nach Vorlesung eine abelsche Gruppe ! Nochmals:

- abgeschlossen und kommutativ: $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$:
  $(x_1, y_1) +_v (x_2, y_2) = \underbrace{(x_1 + x_2, y_1 + y_2)}_{\in \mathbb{R}^2} = (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = (x_2, y_2) +_v (x_1, y_1) \quad (*)$.
- Wegen $(*)$ ist $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ das neutrale Element in $\mathbb{R}^2$, insbesondere $\mathbb{R}^2 \neq \emptyset$.
- Wegen $(*)$ ist $(-x, -y)$ mit $x + (-x) = 0 = y + (-y)$ in $\mathbb{R}$ das inverse Element zu (x, y) in $\mathbb{R}^2$.
- assoziativ: $\forall (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ mit $i \in \{1, 2, 3\}$:
  $[(x_1, y_1) +_v (x_2, y_2)] +_v (x_3, y_3) = ((x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3)) =$
  $= (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3)) = (x_1, y_1) +_v [(x_2, y_2) +_v (x_3, y_3)]$

Distributivität:

- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$:
  $(\lambda + \mu) \cdot_v (x, y) = ((\lambda + \mu) \cdot x, 0) = (\lambda \cdot x + \mu \cdot x, 0) = (\lambda \cdot x, 0) +_v (\mu \cdot x, 0) = \lambda \cdot_v (x, y) +_v \mu \cdot_v (x, y)$
- $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\lambda \cdot_v [(x_1, y_1) +_v (x_2, y_2)] &= \lambda \cdot_v (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (\lambda \cdot (x_1 + x_2), 0) = (\lambda \cdot x_1 + \lambda \cdot x_2, 0) = \\ &= (\lambda \cdot x_1, 0) +_v (\lambda \cdot x_2, 0) = \lambda \cdot_v (x_1, y_1) +_v \lambda \cdot_v (x_2, y_2)\end{aligned}$$

Assoziativität:

- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\lambda \cdot_v (\mu \cdot_v (x, y)) = \lambda \cdot_v (\mu \cdot x, 0) = (\lambda \cdot (\mu \cdot x), 0) = ((\lambda \cdot \mu) \cdot x, 0) = (\lambda \cdot \mu) \cdot_v (x, y)$$

Aber: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, y \neq 0: \qquad 1 \cdot_v (x, y) = (1 \cdot x, 0) = (x, 0) \neq (x, y)$

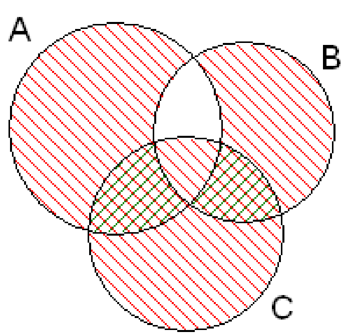
Bemerkung: Definiert man die skalare Multiplikation als $\cdot_v : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $(\lambda, (x, y)) \mapsto (0, 0) \in \mathbb{R}^2$, so ist das unitäre Gesetz nicht erfüllt, aber die Axiome der Distributivität und Assoziativität trivial erfüllt.

Aufgabe 55. Vektorraum der Teilmengen
Es sei M eine nicht leere Menge. Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen von M. $\emptyset$ bezeichne die leere Menge $\{\}$.
Zeigen Sie, dass die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ mit der Addition: $\mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$, $A + B := (A \cup B) \backslash (A \cap B)$ und der skalaren Multiplikation: $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$, $[0]_{2\mathbb{Z}} \cdot A = \emptyset$, $[1]_{2\mathbb{Z}} \cdot A = A$ ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist. (Für den Beweis der Assoziativität reicht eine Skizze.)

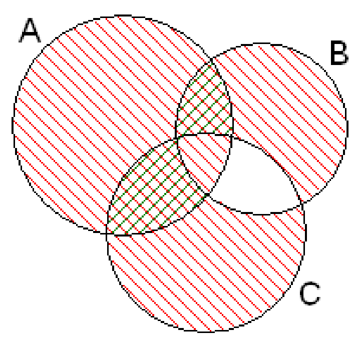
LÖSUNG:

$(\mathcal{P}(M), +)$ ist eine abelsche Gruppe:

- $(\mathcal{P}(M), +)$ ist per Definition der Addition abgeschlossen.
- $\emptyset$ ist neutrales Element, da $\forall A \in \mathcal{P}(M) : A + \emptyset = (A \cup \emptyset) \backslash (A \cap \emptyset) = A \backslash \emptyset = A$
- Jedes Element ist selbstinvers, da $\forall A \in \mathcal{P}(M) : A + A = (A \cup A) \backslash (A \cap A) = A \backslash A = \emptyset$
- Assoziativität: Seien $A, B, C \subseteq M$ beliebig, dann besteht $(A + B) + C$ und $A + (B + C)$ aus den Elementen aus M, welche in genau einer oder in allen drei Teilmengen enthalten sind, und sind daher gleich: Begründung:
$$(A + B) + C = [(A \cup B) \backslash (A \cap B)] + C = \underbrace{\{[(A \cup B) \backslash (A \cap B)] \cup C\}}_{\text{schraffierte Fläche in Figur 1}} \backslash \underbrace{\{[(A \cup B) \backslash (A \cap B)] \cap C\}}_{\text{doppelt schraffierte Fläche in Figur 1}}$$
$$A + (B + C) = A + [(B \cup C) \backslash (B \cap C)] = \underbrace{\{A \cup [(B \cup C) \backslash (B \cap C)]\}}_{\text{schraffierte Fläche in Figur 2}} \backslash \underbrace{\{A \cap [(B \cup C) \backslash (B \cap C)]\}}_{\text{doppelt schraffierte Fläche in Figur 2}}$$



Figur 1:



Figur 2.

- Die Kommutativität von $+$ folgt aus der Kommutativität von $\cup$ und $\cap$.

Unitäres Gesetz $(*)$:

- $[1]_{2\mathbb{Z}} \cdot A = A$ $(\forall A)$ gilt hier nach Definition der skalaren Multiplikation.

Distributivität:

- Falls $\eta = [0]_{2\mathbb{Z}} \Longrightarrow \eta \cdot (A + B) = \emptyset = \eta \cdot A + \eta \cdot B$ klar.
Sonst: $[1]_{2\mathbb{Z}} \cdot (A + B) = A + B = [1]_{2\mathbb{Z}} \cdot A + [1]_{2\mathbb{Z}} \cdot B$ wegen $(*)$.
- Falls $\eta = [0]_{2\mathbb{Z}} \vee \vartheta = [0]_{2\mathbb{Z}} \Longrightarrow (\eta + \vartheta) \cdot A = \eta \cdot A + \vartheta \cdot A$ klar.
Sonst: $([1]_{2\mathbb{Z}} + [1]_{2\mathbb{Z}}) \cdot A = [0]_{2\mathbb{Z}} \cdot A = \emptyset = A + A = [1]_{2\mathbb{Z}} \cdot A + [1]_{2\mathbb{Z}} \cdot A$ wegen $(*)$.

Assoziativität:

- Falls $\eta = [0]_{2\mathbb{Z}} \vee \vartheta = [0]_{2\mathbb{Z}} \Longrightarrow \eta \cdot (\vartheta \cdot A) = (\eta \cdot \vartheta) \cdot A = \emptyset$ klar.
Sonst: $[1]_{2\mathbb{Z}} \cdot ([1]_{2\mathbb{Z}} \cdot A) = [1]_{2\mathbb{Z}} \cdot A = A = ([1]_{2\mathbb{Z}} \cdot [1]_{2\mathbb{Z}}) \cdot A$ wegen $(*)$.

P 56. Unterverktorräume

Welche der folgenden Mengen sind Teilräume der angegebenen Vektorräume über dem Körper $\mathbb{R}$?

- ☐ $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = 2x_3\} \subset \mathbb{R}^3$
- ☐ $\{(\mu + \lambda, \lambda^2) \in \mathbb{R}^2 \mid \mu, \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$
- ☐ $\{f \in Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(-x) = f(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R}\} \subset Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
- ☐ $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \geq x_2\} \subset \mathbb{R}^3$

Wir müssen jeweils das Untervektorraum-Kriterium prüfen!

1. $W := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = 2x_3\} \subseteq \mathbb{R}^3$ ist Untervektorraum, da
   - $W \neq \emptyset$, da $(0,0,0) \in W$
   - (+) abgeschlossen, da für $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in W$ gilt:

     $x_1 = x_2 = 2x_3 \wedge y_1 = y_2 = 2y_3 \underset{\text{Summe der Gleichungen}}{\Rightarrow} x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = 2x_3 + 2y_3 = 2(x_3 + y_3)$

     $\Rightarrow (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \in W$
   - (·) abgeschlossen, da für $(x_1, x_2, x_3) \in W$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

     $x_1 = x_2 = 2x_3 \underset{\text{Multiplikation der Gleichungen mit } \lambda \in \mathbb{R}}{\Rightarrow} \lambda x_1 = \lambda x_2 = 2 \cdot \lambda x_3 \Rightarrow \lambda \cdot (x_1, x_2, x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) \in W$

---

2. $W := \{(\mu + \lambda, \lambda^2) \in \mathbb{R}^2 \mid \mu, \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ist kein Untervektorraum, da $\forall (x, y) \in W$ gilt $y \geq 0$ speziell $(1,1) \in W$, aber skalare Multiplikation mit $(-1) \in \mathbb{R}$ liefert $(-1) \cdot (1,1) = (-1,-1) \notin W$, d.h. (·) ist nicht abgeschlossen (Bem: (+) ist abgeschlossen und $W \neq \emptyset$)

---

3. $W := \{f \in Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(-x) = f(x) \ \forall x \in \mathbb{R}\} \subset Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist Untervektorraum
   - $f(x) = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$ (Nullfunktion) liegt in $W \Rightarrow W \neq \emptyset$
   - $f, g \in W$: $(f+g)(x) \underset{\text{Def. der Add.}}{=} f(x) + g(x) \underset{\text{Bed. } f, g \in W}{=} f(-x) + g(-x) \underset{\text{Def der Add.}}{=} (f+g)(-x) \ \forall x \in \mathbb{R}$

     $\Rightarrow (f+g) \in W$
   - $f \in W, \lambda \in \mathbb{R}$: $(\lambda \cdot f)(x) \underset{\text{Def. der skal. Mult.}}{=} \lambda \cdot f(x) = \lambda \cdot f(-x) \underset{\text{Def der skal. Mult.}}{=} (\lambda \cdot f)(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

     $\Rightarrow (\lambda \cdot f) \in W$

---

4. $W := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \geq x_2\} \subseteq \mathbb{R}^3$ ist kein Untervektorraum, da z.B. $(1,0,0) \in W$, aber $(-1) \cdot (1,0,0) = (-1,0,0) \notin W$, d.h. (·) ist nicht abgeschlossen. (Bem.: (+) ist abgeschlossen und $W \neq \emptyset$)