Aufgabe 58. Vektorraum der Folgen
Sei $(K,+,\cdot)$ ein Körper. Auf der Menge $\mathcal{F}$ aller Folgen $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} = (a_0, a_1, ...)$ mit Elementen $a_i \in K$, $\forall i \in \mathbb{N}$, sei
eine Addition $\oplus : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ durch $((a_i)_{i\in\mathbb{N}}, (b_i)_{i\in\mathbb{N}}) \mapsto (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \oplus (b_i)_{i\in\mathbb{N}} := (a_i + b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und
eine Skalarmultiplikation $\circ : K \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ durch $(k, (a_i)_{i\in\mathbb{N}}) \mapsto k \circ (a_i)_{i\in\mathbb{N}} := (k \cdot a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ erklärt.
Zeigen Sie durch Nachweis der Vektorraumaxiome, dass $\mathcal{F}$ ein K-Vektorraum ist.

LÖSUNG:

$(\mathcal{F}, \oplus)$ ist eine abelsche Gruppe:

- Offenbar ist $\mathcal{F}$ nach der Definition der Addition bezüglich $\oplus$ abgeschlossen und abelsch, da
  $\forall (a_i)_{i\in\mathbb{N}}, (b_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F} \qquad (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \oplus (b_i)_{i\in\mathbb{N}} = (a_i + b_i)_{i\in\mathbb{N}} = (b_i + a_i)_{i\in\mathbb{N}} = (b_i)_{i\in\mathbb{N}} \oplus (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$
- $(0_K)_{i\in\mathbb{N}} = (0_K, 0_K, ...)$ mit der Null O_K aus K ist neutrales Element von $\mathcal{F}$, da $\forall (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}$:
  $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \oplus (0_K)_{i\in\mathbb{N}} = (a_i + 0_K)_{i\in\mathbb{N}} = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Insbesondere $(0_K)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F} \neq \emptyset$.
- $\forall (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F} : (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \oplus (-a_i)_{i\in\mathbb{N}} = (a_i + (-a_i))_{i\in\mathbb{N}} = (0_K)_{i\in\mathbb{N}}$,
  wobei $-a_i$ das additive Inverse zu a_i in K ist $(\forall i) \qquad \Rightarrow$
  $(-a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}$ ist die additiv inverse Folge zu $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$
- $\forall (a_i)_{i\in\mathbb{N}}, (b_i)_{i\in\mathbb{N}}, (c_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F} \qquad [(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \oplus (b_i)_{i\in\mathbb{N}}] \oplus (c_i)_{i\in\mathbb{N}} = ((a_i + b_i) + c_i)_{i\in\mathbb{N}} =$
  $= (a_i + (b_i + c_i))_{i\in\mathbb{N}} = (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \oplus [(b_i)_{i\in\mathbb{N}} \oplus (c_i)_{i\in\mathbb{N}}]$, da $(K,+)$ assoziativ ist.

$(\mathcal{F}, \oplus, \circ)$ ist distributiv:

- $\forall \rho \in K, \forall (a_i)_{i\in\mathbb{N}}, (b_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F} : \rho \circ [(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \oplus (b_i)_{i\in\mathbb{N}}] = \rho \circ (a_i + b_i)_{i\in\mathbb{N}} = (\rho \cdot (a_i + b_i))_{i\in\mathbb{N}} =$
  $= (\rho \cdot a_i + \rho \cdot b_i)_{i\in\mathbb{N}} = (\rho \cdot a_i)_{i\in\mathbb{N}} \oplus (\rho \cdot b_i)_{i\in\mathbb{N}} = \rho \circ (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \oplus \rho \circ (b_i)_{i\in\mathbb{N}}$, da $(K,+,\cdot)$ distributiv ist.
- $\forall \rho, \sigma \in K, \forall (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F} : (\rho + \sigma) \circ (a_i)_{i\in\mathbb{N}} = ((\rho + \sigma) \cdot a_i)_{i\in\mathbb{N}} = (\rho \cdot a_i + \sigma \cdot a_i)_{i\in\mathbb{N}} =$
  $= (\rho \cdot a_i)_{i\in\mathbb{N}} \oplus (\sigma \cdot a_i)_{i\in\mathbb{N}} = \rho \circ (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \oplus \sigma \circ (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, da $(K,+,\cdot)$ distributiv ist.

$(\mathcal{F}, \circ, \cdot)$ ist assoziativ:

- $\forall \rho, \sigma \in K, \forall (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F} : \rho \circ (\sigma \circ (a_i)_{i\in\mathbb{N}}) = (\rho \cdot (\sigma \cdot a_i))_{i\in\mathbb{N}} = ((\rho \cdot \sigma) \cdot a_i)_{i\in\mathbb{N}} = (\rho \cdot \sigma) \circ (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$,
  da $(K, \cdot)$ assoziativ ist.

$(\mathcal{F}, \circ)$ erfüllt das unitäre Gesetz:

- $\forall (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F} : 1_K \circ (a_i)_{i\in\mathbb{N}} = (1_K \cdot a_i)_{i\in\mathbb{N}} = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$,
  wobei $1_K \in K$ multiplikatives neutrales Element (die Eins) in K ist.

Aufgabe 59. Vektorraum der Abbildungen
Sei $(K, \oplus, \odot)$ ein Körper und M eine beliebige nichtleere Menge und S= Abb $(M;K)$ die Menge aller Abbildungen von M nach K.
Zeigen Sie, dass $(S,+,\bullet)$ mit der Addition $(f+g)(m) := f(m) \oplus g(m) \quad \forall m \in M, f, g \in S$
und der skalaren Multiplikation $(\lambda \bullet g)(m) := \lambda \odot g(m) \quad \forall m \in M, \lambda \in K, g \in S$ ein Vektorraum über K ist.

Hinweis: Vergleiche Aufgabe P 39.

LÖSUNG:

Nach Aufgabe 39 ist $(S,+)$ eine kommutative (abelsche) Gruppe.

Bleibt zu zeigen, dass $(S, +, \bullet)$ mit der oben definierten skalaren Multiplikation $\bullet$ eines Skalars $\lambda \in K$ mit einem Vektor $g \in S$ (nicht zu verwechseln mit der in Aufgabe 39 definierten Multiplikation $\cdot$ zweier Abbildungen $f, g \in S$!) bezüglich $\bullet$ abgeschlossen, distributiv und assoziativ ist und das unitäre Gesetz erfüllt.

- abgeschlossen, da $\forall \lambda \in K$ und $\forall g \in S$ durch $k(m) := \lambda \odot g(m) \ \ \forall m \in M$ eine Abbildung $k = \lambda \bullet g : M \to K$ eindeutig definiert ist.
- distributiv, da
  1. $\forall \lambda \in K, \forall f, g \in S : \quad [\lambda \bullet (f+g)](m) = \lambda \odot (f+g)(m) = \lambda \odot [f(m) \oplus g(m)] =$ $\lambda \odot f(m) \oplus \lambda \odot g(m) = (\lambda \bullet f)(m) \oplus (\lambda \bullet g)(m) = [(\lambda \bullet f) + (\lambda \bullet g)](m) \quad \forall m \in M$ $\Leftrightarrow \quad \lambda \bullet (f+g) = (\lambda \bullet f) + (\lambda \bullet g)$
  2. $\forall \lambda, \mu \in K, \forall f \in S : \quad [(\lambda \oplus \mu) \bullet f](m) = (\lambda \oplus \mu) \odot f(m) = \lambda \odot f(m) \oplus \mu \odot f(m) =$ $(\lambda \bullet f)(m) \oplus (\mu \bullet f)(m) = [(\lambda \bullet f) + (\mu \bullet f)](m) \quad \forall m \in M \Leftrightarrow \quad (\lambda \oplus \mu) \bullet f = (\lambda \bullet f) + (\mu \bullet f)$
- assoziativ, da
  $\forall \lambda, \mu \in K, \forall f \in S : \quad [\lambda \bullet (\mu \bullet f)](m) = \lambda \odot (\mu \bullet f)(m) = \lambda \odot (\mu \odot f(m)) =$ $(\lambda \odot \mu) \odot f(m) = [(\lambda \odot \mu) \bullet f](m) \quad \forall m \in M \Leftrightarrow \quad \lambda \bullet (\mu \bullet f) = (\lambda \odot \mu) \bullet f$
- erfüllt unitäres Gesetz, da mit der Eins 1_K aus $K \ \ \forall f \in S$ gilt:
  $(1_K \bullet f)(m) = 1_K \odot f(m) = f(m) \quad \forall m \in M \quad \Leftrightarrow 1_K \bullet f = f$

Aufgabe 60. Schnitt und Vereinigung von Untervektorräumen.
Sei V ein K-Vektorraum über dem Körper K , und seien U_1 und U_2 zwei Untervektorräume von V .

1. Zeigen Sie : Die Menge $U_1 \cap U_2 := \{v \in V \,|\, v \in U_1 \wedge v \in U_2\}$ ist wieder ein Untervektorraum von V.
2. Ist auch die Menge $U_1 \cup U_2 := \{v \in V \,|\, v \in U_1 \vee v \in U_2\}$ ein Untervektorraum von V?

LÖSUNG:

1. Wir verwenden das Untervektorraum-Kriterium:
   - **nicht leer:** Nullvektor $0 \in U_1 \wedge 0 \in U_2 \ \Rightarrow \ 0 \in U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$.
   - $+$ **abgeschlossen:** $v, w \in U_1 \cap U_2 \ \Rightarrow \ v, w \in U_1 \wedge v, w \in U_2 \ \Rightarrow \ v + w \in U_1 \wedge v + w \in U_2$ $\Rightarrow \ \forall v, w \in U_1 \cap U_2 : \quad v + w \in U_1 \cap U_2$
   - $\cdot$ **abgeschlossen:** $v \in U_1 \cap U_2 \ \Rightarrow v \ \in U_1 \wedge v \in U_2 \ \Rightarrow \ \forall \lambda \in \mathbb{K} : \lambda \cdot v \in U_1 \wedge \lambda \cdot v \in U_2$ $\Rightarrow \ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall v \in U_1 \cap U_2 : \quad \lambda \cdot v \in U_1 \cap U_2$
2. Wir zeigen durch Angabe eines Gegenbeispiels, dass $U_1 \cup U_2$ i.a. kein Vektorraum ist.

   Die beiden Teilmengen

$$U_1 := \left\{ \lambda \cdot v_1 \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{mit} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$U_2 := \left\{ \lambda \cdot v_2 \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{mit} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

des Vektorraums $\mathbb{R}^2$ bilden jeweils einen Untervektorraum des $\mathbb{R}^2$. Nun ist

$$\begin{aligned} U_1 \cup U_2 &= \left\{ v \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, v \in U_1 \text{ oder } v \in U_2 \right\} \\ &= \left\{ v \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \exists \lambda_1 \in \mathbb{R} : v = \lambda_1 \cdot v_1 \quad \text{oder} \quad \exists \lambda_2 \in \mathbb{R} : v = \lambda_2 \cdot v_2 \right\} \end{aligned}$$

Nehmen wir z.B. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_1$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in U_2$, so ist $v_1 + v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin U_1 \cup U_2$,

da es weder ein $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ noch ein $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot v_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_2 \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Die Vektoraddition $+$ ist also auf $U_1 \cup U_2$ nicht abgeschlossen !

Aufgabe 57. Fingerübungen
Sei V ein Vektorraum $(V, +_v, \cdot_v)$ über einem Körper $(K, +, \cdot)$.

1. Zeigen Sie, dass gilt: $\lambda \cdot_v v = 0 \;\; , \lambda \in K, v \in V \;\; \Rightarrow \;\; \lambda = 0 \in K \;\; \vee \;\; v = 0 \in V$.
2. Zeigen Sie: K ist bei geeignet gewählter Vektoraddition $+_v$ und skalaren Multiplikation $\cdot_v$ selbst ein Vektorraum über K.

1. Annahme: $\exists \lambda \neq 0 \in K$ mit $\lambda \cdot_v v = 0 \in V \Rightarrow \exists \lambda^{-1} \in K : \lambda^{-1} \lambda = 1 \in K$
und $v = 1 \cdot_v v = (\lambda^{-1} \lambda) \cdot_v v = \lambda^{-1} \cdot_v (\lambda \cdot_v v) = \lambda^{-1} \cdot_v 0 = 0 \in V \Rightarrow$
Es gilt: $\lambda \cdot_v v = 0 \Rightarrow v = 0 \in V$ <u>oder</u> $\lambda = 0 \in K$

2. Wähle für $(V = K, +_v, \cdot_v)$ als Vektoraddition $+_v$ die Addition $+$ des Körpers K und als skalare Multiplikation $\cdot_v$ die Multiplikation $\cdot$ des Körpers K $\Rightarrow$
$(K, +)$ ist abelsche Gruppe und $\forall \lambda, \mu, x, y \in K$ gilt im Körper $(K, +, \cdot)$:
• $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$; • $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$; • $(\lambda \cdot \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$; • $1 \cdot x = x$
Damit ist jeder Körper K auch ein Vektorraum über sich selbst.