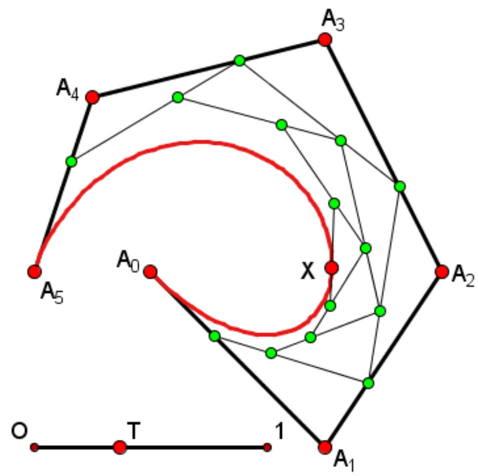
PROF. DR.DR. JÜRGEN RICHTER-GEBERT, DR. HERMANN VOGEL

Lineare Algebra und analytische Geometrie 1 & Mathematik für Physiker 1 (WS 2007/08)
— Aufgabenblatt 07 (10. Dezember 2007) —

— Zentrale Präsenzaufgaben —

Z 52. De-Casteljau-Algorithmus für Bezier-Kurven
In einem xy-Koordinatensystem seien $n+1$ Punkte $A_0 = (x_0, y_0), ...,$ $A_n = (x_n, y_n), n \in \mathbb{N}$ gegeben, die einen Streckenzug $A_0 ... A_n$ mit n Strecken festlegen, sowie ein Wert $t \in [0,1]$.



1. Zeigen Sie, dass die Punkte $A_i^1 := (1-t) \cdot A_i + t \cdot A_{i+1}$ für $i = 0, ..., n-1$ die Strecken (A_i, A_{i+1}) im Verhältnis $t : (1-t)$ teilen und somit für ein festes t einen Streckenzug $A_0^1 ... A_{n-1}^1$ mit $n-1$ Strecken bilden.

Führt man dies iterativ fort, so erhält man für $r = 2, ..., n$ mit
$$A_i^r := (1-t) \cdot A_i^{r-1} + t \cdot A_{i+1}^{r-1}, \; i = 0, ..., n-r$$
schließlich einen Punkt $X(t) := A_0^n$ zum Parameter $t \in [0,1]$.
Durchläuft nun t das Intervall $[0,1]$, so beschreibt $X(t)$ eine Bezier-Kurve c, die von den Punkten $A_0, ..., A_n$ abhängt. Man nennt die Punkte $A_0, ..., A_n$ daher Kontrollpunkte von c.

2. Begründen Sie, warum die Kontrollpunkte A_0 und A_n Anfangs- und Endpunkt der Kurve c sind.

3. Begründen Sie, warum die Koordinaten von $X(t) = (x(t), y(t))$ Polynome in t höchstens vom Grad n sind.

4. Bestimmen Sie $X(t)$ für $n = 2$ und $n = 3$. Welche Vermutung ergibt sich für allgemeines n ?

— Präsenzaufgaben —

M 53. Axiomatisch richtig?
Welche der folgenden Aussagen gelten in einem Vektorraum V über einem Körper K?

☐ $(V \backslash \{0\}, \cdot)$ ist kommutative Gruppe.

☐ $\forall \lambda \in K, \forall v, w \in V$ gilt $\lambda(v+w) = \lambda v + \lambda w$.

☐ $(K, \cdot)$ ist kommutative Gruppe.

☐ $\forall \lambda \in K, \forall v \in V$ gilt $\lambda v = v \lambda$.

☐ $\forall \lambda, \mu \in K, \forall v \in V$ gilt $(\lambda\mu)v = \mu(\lambda v)$.

☐ $\forall \lambda, \mu \in K, \forall v \in V$ gilt $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$.

☐ $\forall \lambda, \mu \in K, \forall v \in V$ gilt $\lambda(v + \mu) = \lambda v + \lambda \mu$.

☐ $\forall v \in V$ gilt $(-1)v = -v$.

Wie lauten die richtig angegebenen Beziehungen unter Verwendung unterschiedlicher Verknüpfungszeichen für $(V, +_v, \cdot_v)$ und $(K, +, \cdot)$.

P 54. Unitäres Gesetz
Zeigen Sie durch Angabe eines nicht trivialen Gegenbeispiels:
Das unitäre Gesetz: $\forall \vec{x} \in V \wedge 1 \in K : \; 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$ ist unabhängig von den übrigen Vektorraumaxiomen (d.h. das unitäre Gesetz folgt nicht aus den übrigen Vektorraumaxiomen).

P 55. Vektorraum der Teilmengen
Es sei M eine nicht leere Menge. Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen von M. $\emptyset$ bezeichne die leere Menge $\{\}$.
Zeigen Sie, dass die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ mit der Addition: $\mathcal{P}(M)\times\mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M), \quad A+B := (A\cup B)\setminus(A\cap B)$
und der skalaren Multiplikation: $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M), \quad [0]_{2\mathbb{Z}} \cdot A = \emptyset \,, \ [1]_{2\mathbb{Z}} \cdot A = A$
ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist. (Für den Beweis der Assoziativität reicht eine Skizze.)

P 56. Untervektorräume
Welche der folgenden Mengen sind Teilräume der angegebenen Vektorräume über dem Körper $\mathbb{R}$?

- ☐ $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 = x_2 = 2x_3\} \subset \mathbb{R}^3$
- ☐ $\{(\mu + \lambda, \lambda^2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \mu, \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$
- ☐ $\{f \in Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \,|\, f(-x) = f(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R}\} \subset Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
- ☐ $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 \geq x_2\} \subset \mathbb{R}^3$

— Hausaufgaben —

H 57. Fingerübungen
Sei V ein Vektorraum $(V, +_v, \cdot_v)$ über einem Körper $(K, +, \cdot)$.

1. Zeigen Sie, dass gilt: $\lambda \cdot_v v = 0 \ \ , \lambda \in K, v \in V \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0 \in K \quad \vee \quad v = 0 \in V.$
2. Zeigen Sie: K ist bei geeignet gewählter Vektoraddition $+_v$ und skalaren Multiplikation $\cdot_v$ selbst ein Vektorraum über K.

H 58. Vektorraum der Folgen
Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Auf der Menge $\mathcal{F}$ aller Folgen $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} = (a_0, a_1, ...)$ mit Elementen $a_i \in K, \forall i \in \mathbb{N}$, sei
eine Addition $\oplus : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ durch $((a_i)_{i\in\mathbb{N}}, (b_i)_{i\in\mathbb{N}}) \mapsto (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \oplus (b_i)_{i\in\mathbb{N}} := (a_i + b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und
eine Skalarmultiplikation $\circ : K \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ durch $(k, (a_i)_{i\in\mathbb{N}}) \mapsto k \circ (a_i)_{i\in\mathbb{N}} := (k \cdot a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ erklärt.
Zeigen Sie durch Nachweis der Vektorraumaxiome, dass $\mathcal{F}$ ein K-Vektorraum ist.

H 59. Vektorraum der Abbildungen
Sei $(K, \oplus, \odot)$ ein Körper und M eine beliebige nichtleere Menge und S= Abb $(M; K)$ die Menge aller Abbildungen von M nach K.
Zeigen Sie, dass $(S, +, \bullet)$ mit der Addition $(f + g)(m) := f(m) \oplus g(m) \quad \forall m \in M, f, g \in S$
und der skalaren Multiplikation $(\lambda \bullet g)(m) := \lambda \odot g(m) \quad \forall m \in M, \lambda \in K, g \in S$ ein Vektorraum über K ist.
Hinweis: Vergleiche Aufgabe P 39.

H 60. Schnitt und Vereinigung von Untervektorräumen.
Sei V ein K-Vektorraum über dem Körper K , und seien U_1 und U_2 zwei Untervektorräume von V .

1. Zeigen Sie : Die Menge $U_1 \cap U_2 := \{v \in V \,|\, v \in U_1 \wedge v \in U_2\}$ ist wieder ein Untervektorraum von V.
2. Ist auch die Menge $U_1 \cup U_2 := \{v \in V \,|\, v \in U_1 \vee v \in U_2\}$ ein Untervektorraum von V?

Abgabetermin ist der 07.01.2008 bis 12:00 Uhr (Einwurfkasten im Untergeschoss des FMI-Gebäudes).