P 46. Wir drehen uns im Kreis

Zu $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge der n–ten Einheitswurzeln gegeben durch

$$\Omega_n = \left\{ e^{i\frac{k}{n}2\pi} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

1. Zeigen Sie, dass Ω_n zusammen mit der Multiplikation der komplexen Zahlen eine Gruppe ist.
2. Bestimmen Sie die kartesischen Koordinaten der sechsten Einheitswurzeln und geben Sie die zugehörigen Punkte auf dem Einheitskreis an.
3. Bestimmen Sie sämtliche Untergruppen von Ω_6.
4. Geben Sie zu den nicht-trivialen Untergruppen von Ω_6 jeweils sämtliche Nebenklassen von Ω_6 an.
5. Weisen Sie nach, dass die Gruppen $(\Omega_n, \cdot)$ und $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \oplus)$ isomorph sind.

1) Wir zeigen, dass $(\Omega_n, \cdot)$ eine Untergruppe von $(\mathbb{C}\setminus\{0\}, \cdot)$ ist.

- Ω_n ist nicht leer, da für $k=0$: $e^{2\pi i \frac{k}{n}} = e^0 = 1 \in \Omega_n$ (Einselement)
- Multiplikation ist in Ω_n abgeschlossen,
  da für: $e^{2\pi i \frac{k}{n}}, e^{2\pi i\frac{k'}{n}} \in \Omega_n$ mit $k,k' \in \mathbb{Z}$ gilt:
  $$e^{2\pi i \frac{k}{n}} \cdot e^{2\pi i \frac{k'}{n}} = e^{2\pi i \frac{k+k'}{n}} \in \Omega_n \quad \text{wegen } k+k' \in \mathbb{Z}$$
- Inversenbildung: Zu $e^{2\pi i\frac{k}{n}} \in \Omega_n$ mit $k\in\mathbb{Z}$ ist $e^{2\pi i \frac{-k}{n}} \in \Omega_n$ ein inverses Element, da $e^{2\pi i \frac{k}{n}} \cdot e^{2\pi i \frac{-k}{n}} = e^0 = 1$

Bemerkung: genaugenommen enthält Ω_n genau n Elemente, da

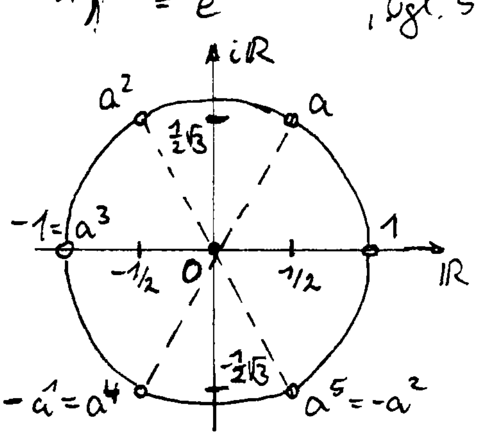
$e^{2\pi i \frac{k}{n}} = e^{2\pi i \frac{k'}{n}} \Leftrightarrow 2\pi i \frac{k}{n} = 2\pi i \frac{k'}{n} + 2\pi i \cdot l,\ l\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow k = k' + l\cdot n,\ l \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow k = k' \bmod n \Rightarrow \omega_n = \{e^{2\pi i \frac{k}{n}} \mid k = 0,1,2,\dots,n-1\}$,

wobei dann im Exponenten mod n gerechnet wird:

$e^{2\pi i \frac{k}{n}} \cdot e^{2\pi i\frac{k'}{n}} = e^{2\pi i \frac{(k+k') \bmod n}{n}}$ und $\left(e^{2\pi i \frac{k}{n}}\right)^{-1} = e^{2\pi i \frac{n-k}{n}}$, vgl. 5)!

2) $\Omega_6 = \{e^{2\pi i \frac{k}{6}} \mid k=0,1,2,3,4,5\}$



$a^0 = e^{i\frac{0}{3}\pi} = e^0 = 1$

$\rightarrow a := e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac12 + \frac12\sqrt3\, i$

$a^2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3}) = -\frac12 + \frac12\sqrt3\, i$

$a^3 = e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$

$a^4 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos(\frac{4\pi}{3}) + i\sin(\frac{4\pi}{3}) = -\frac12 - \frac12\sqrt3\, i = -a \quad (= e^{i(\pi+\frac{\pi}{3})} = -e^{i\frac{\pi}{3}})$

$a^5 = e^{i\frac{5\pi}{3}} = \cos(\frac{5\pi}{3}) + i\sin(\frac{5\pi}{3}) = \frac12 - \frac12\sqrt3\, i = -a^2 \quad (= e^{i(\pi+\frac{2\pi}{3})} = -e^{i\frac{2\pi}{3}})$,

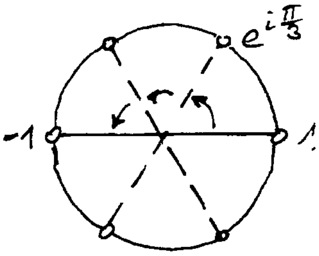
Bemerkung: Man sagt: $a = e^{i\frac{\pi}{3}}$ erzeugt die (Unter)-Gruppe !

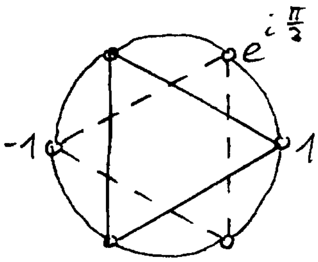
3/4| Sämtliche Untergruppen von Ω_6 und zugehörige Nebenklassen sind

- $\{1\} = \Omega_1$ (trivial)
- $\{1,-1\} = \overset{\Omega_2}{\overset{\|}{U_1}} = \{e^{i\frac{0\pi}{3}}, e^{i\frac{3\pi}{3}}\}$ | $e^{i\frac{\pi}{3}}U_1 = \{e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}\}$, $e^{i\frac{2\pi}{3}}U_1 = \{e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{5\pi}{3}}\}$
- $\{1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}\} = U_2 = \Omega_3$ | $e^{i\frac{\pi}{3}}U_2 = \{e^{i\frac{\pi}{3}}, \underbrace{e^{i\frac{3\pi}{3}}}_{=-1}, e^{i\frac{5\pi}{3}}\}$
- Ω_6 (trivial)

<u>Bemerkung</u>: Enthält eine Untergruppe U von Ω_6 das Element $a = e^{i\frac{\pi}{3}}$ oder $b = e^{i\frac{5\pi}{3}}$, so ist $U = \Omega_6$! Betrachte a^l, b^l mit $l = 0,1,2,3,4,5$.

Geometrische Deutung: Die Untergruppen von Ω_6 sind die Eckpunktemengen aller möglichen regelmäßigen k-Ecke im 6-Eck, die auch den Punkt 1 enthalten. Die zugehörigen Nebenklassen erhält man durch wiederholte Drehung dieser Eckpunktemengen um $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$. Dies gilt nicht nur für $n = 6$ sondern auch für allgemeines $n \in \mathbb{N}$.





5) Wir betrachten die Abbildung $\varphi: \begin{cases} \Omega_n \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} , (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \oplus) \\ \underset{k\in\mathbb{Z}?}{e^{2\pi i \frac{k}{n}}} \mapsto [k] \text{ mit } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

und zeigen:

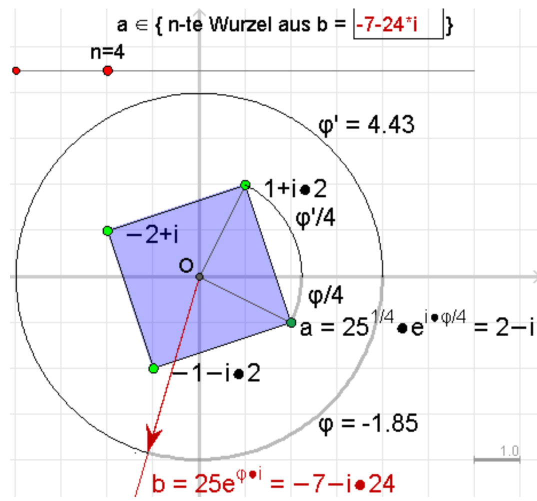
- φ ist wohldefiniert, da für $k \in \mathbb{Z}$ und $k' = k + r \cdot n$, $r \in \mathbb{Z}$ gilt: $e^{2\pi i \frac{k}{n}} = e^{2\pi i \frac{k'}{n}}$ vgl. 1) und $\varphi(e^{2\pi i \frac{k'}{n}}) = [k'] = [k+rn] = [k] = \varphi(e^{2\pi i \frac{k}{n}})$
- φ ist ein Gruppenhomomorphismus, da für $e^{2\pi i \frac{k}{n}}$ und $e^{2\pi i \frac{k'}{n}} \in \Omega_n$ mit $k, k' \in \mathbb{Z}$ gilt:
$$\varphi(e^{2\pi i \frac{k}{n}} \cdot e^{2\pi i \frac{k'}{n}}) = \varphi(e^{2\pi i \frac{k+k'}{n}}) = [k+k'] = [k] \oplus [k'] = \varphi(e^{2\pi i \frac{k}{n}}) \oplus \varphi(e^{2\pi i \frac{k'}{n}})$$
- φ ist nach Bemerkung zu 1) offensichtlich surjektiv <u>bzw.</u> wähle zu $[k] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ einfach $e^{2\pi i \frac{k}{n}} \in \Omega_n \Rightarrow \varphi(e^{2\pi i \frac{k}{n}}) = [k]$ ✓
- φ ist injektiv, da für $e^{2\pi i \frac{k}{n}} \underset{\Leftrightarrow k \neq k' + r\cdot n,\, r \in \mathbb{Z}}{\underset{\uparrow}{\neq}} e^{2\pi i \frac{k'}{n}} \in \Omega_n \Rightarrow [k] = \varphi(e^{2\pi i \frac{k}{n}}) \underset{\Leftrightarrow k \neq k' + r\cdot n,\, r \in \mathbb{Z}}{\underset{\uparrow}{\neq}} \varphi(e^{2\pi i \frac{k'}{n}}) = [k']$

<u>bzw.</u> weil φ surjektiv und die Mengen Ω_n und $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ die gleiche Mächtigkeit haben, muss φ auch injektiv sein.

Aufgabe 47. Radikale
Gegeben sei das Polynom $p \in \mathbb{C}[X]$ mit $p(X) = X^4 + 7 + 24i$. Bestimmen Sie sämtliche Nullstellen von p.
LÖSUNG:

Allgemein gilt: Für $n \in \mathbb{N}$ sind mit einer Nullstelle a von $X^n - a^n$ und den n-ten Einheitswurzeln $e^{2\pi i \frac{k}{n}}$, $k = 0, \dots, n-1$, auch $e^{2\pi i \frac{k}{n}} \cdot a$ Nullstellen von $X^n - a^n$, wie man durch Einsetzen überprüft. Da ein Polynom $n - ten$ Grades höchstens n Nullstellen besitzt, sind dies bereits alle.

Hier gilt: Mit einer Nullstelle a von $X^4 - a^4$ erhält man mit $i^k \cdot a$, $k = 0, \dots, 3$ alle Nullstellen von $X^4 - a^4$. Dabei ist $a^4 = -7 - 24i$. Um a zu bestimmen, stellen wir $-7 - 24i$ in der Form $re^{i \cdot \varphi}$ mit $\varphi \in \ [-\pi, \pi[$ dar.
Es ist: $r = \sqrt{(-7)^2 + (-24)^2} = \sqrt{49 + 576} = \sqrt{625} = 25.$
und $\varphi = sign(-24) \cdot arccos(\frac{-7}{25}) \approx -1.85459043601 \in [-\pi, \pi[$
$\Rightarrow a^4 \approx 25 \cdot e^{-1.85459043601 \cdot i}$ und $a \approx \sqrt[4]{25} \cdot e^{-1.85459043601 \cdot i/4} \approx$
$\approx \sqrt[4]{25}(\cos(-1.85459043601/4) + i \cdot \sin(-1.85459043601/4))$
$\Rightarrow a \approx 1.999999 - 0.99999i$. Die naheliegende Vermutung "$a = 2 - i$" ist mit $a^2 = 3 - 4i$ unmittelbar verifizierbar.
Also sind die Lösungen unserer Gleichung die vier Werte
$a = 2 - i$, $i \cdot a = 2i + 1$, $i^2 \cdot a = -2 + i$ und $i^3 \cdot a = -2i - 1$.
Wählt man für $-7 - 24i = re^{\varphi \cdot i}$ $\varphi \in [0, 2\pi[$, so erhält man mit $\varphi' = 2\pi + \varphi \approx 4,428594872$: $a^4 = 25 \cdot e^{4,428594872 \cdot i}$
also $a = \sqrt[4]{25} \cdot e^{4,428594872 \cdot i/4} \approx 0.999999 + 1.99999i$, d.h. eine andere der vier Lösungen, vgl. Figur. Wie erhält man die anderen?



Aufgabe 48. Nullstellenbestimmung
Aus dem Fundamentalsatz der Algebra folgt:
Jedes reelle Polynom $p \in \mathbb{R}[X]$ vom Grad $deg(p) = n \geq 1$ besitzt mindestens eine Nullstelle $\xi \in \mathbb{C}$ (d.h. $p(\xi) = 0$). Nach Aufgabe **P 41** ist dann auch die zu ξ konjugierte Zahl $\overline{\xi}$ Nullstelle von p (d.h. $p(\overline{\xi}) = 0$).

1. Folgern Sie daraus, dass jedes Polynom $p \in \mathbb{R}[X]$ mit ungeradem Grad mindestens eine *reelle* Nullstelle besitzt.
2. Zeigen Sie, dass $\xi = 2$ dreifache Nullstelle der Polynome
$$f(X) := X^5 - 8X^4 + 21X^3 - 14X^2 - 20X + 24$$
und
$$g(X) := X^5 - 8X^4 + 27X^3 - 50X^2 + 52X - 24$$
ist. Bestimmen Sie auch die übrigen Nullstellen von $f(X)$ und $g(X)$.

LÖSUNG:

1. Es sei n der Grad von $p \in \mathbb{R}[X]$. Für $n = 1$ ist die einzige Nullstelle offensichtlich reell.
Für $n > 2$, n ungerade, sei nun schon bewiesen, dass jedes reelle Polynom vom Grade $n - 2$ mindestens eine *reelle* Nullstelle besitzt.
Nach dem Fundamentalsatz der Algebra besitzt p vom Grade n in jedem Fall eine Nullstelle $z \in \mathbb{C}$.
Ist $z \in \mathbb{R}$ haben wir eine gewünschte reelle Nullstelle gefunden.
Andernfalls wissen wir aus der Aufgabe 41, dass auch $\overline{z} \neq z$ eine Nullstelle von p ist.
Nun hat $(X - z)(X - \overline{z}) = X^2 - (z + \overline{z})X + z\overline{z}$ nach Aufgabe 41 Teil 1 nur reelle Koeffizienten.
Polynomdivision ergibt also erneut ein reelles Polynom q vom Grade $n - 2$ mit
$p(X) = (X - z)(X - \overline{z})q(X)$.
Nach Induktionsvoraussetzung besitzt q eine reelle Nullstelle, die offenbar auch Nullstelle von p ist.

2) Wir berechnen:

$f(2) = 32 - 8\cdot 16 + 21\cdot 8 - 14\cdot 4 - 20\cdot 2 + 24 = 32 - 128 + 168 - 56 - 40 + 24 = 224 - 224 = 0$

$g(2) = 32 - 8\cdot 16 + 27\cdot 8 - 50\cdot 4 + 52\cdot 2 - 24 = 32 - 128 + 316 - 200 + 104 - 24 = 452 - 452 = 0$

$\Rightarrow \xi = 2$ ist eine Nullstelle von $f(X)$ und $g(X)$.

Wenn $\xi = 2$ dreifache Nullstelle ist, dann lässt sich $f(X)$ und $g(X)$ darstellen als: $f(X) = p(X)\cdot(X-2)^3$ und $g(X) = q(X)\cdot(X-2)^3$ mit $p(X), q(X) \in \mathbb{R}[X]$ und $\text{grad}\, p = \text{grad}\, q \underset{\uparrow}{=} 5 - 3 = 2$

grad f = grad g = 5

Bestimmung von p und q durch Ansatz mit Koeffizientenvergleich oder Polynomdivision (analog schriftliche Division in $\mathbb{N}$; z.B. $204 : 17$)

- Ansatz: $p(X) = aX^2 + bX + c$; $\left((a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\right)$

$$p(X)\cdot(X-2)^3 = (aX^2 + bX + c)(X^3 - 6X^2 + 12X - 8) =$$
$$= aX^5 + (b-6a)X^4 + (c - 6b + 12a)X^3 +$$
$$+ (-6c + 12b - 8a)X^2 + (12c - 8b)X + (-8c)$$
$$\overset{!}{=} X^5 - 8X^4 + 21X^3 - 14X^2 - 20X + 24$$

Koeffizientenvergleich $\Leftrightarrow a = 1,\ b = -2,\ c = -3 \Leftrightarrow \underline{p(X) = X^2 - 2X - 3}$

(Bemerkung: überbestimmtes LGS mit eindeutiger Lösung !)

- Polynomdivision für $g(X)$

$$(X^5 - 8X^4 + 27X^3 - 50X^2 + 52X - 24) : (X^3 - 6X^2 + 12X - 8) = \underline{X^2 - 2X + 3 = q(X)}$$

$$\begin{array}{rl}
 & X^5 - 8X^4 + 27X^3 - 50X^2 + 52X - 24 \\
(-) & \underline{X^5 - 6X^4 + 12X^3 - 8X^2} \\
 & / \ -2X^4 + 15X^3 - 42X^2 + 52X - 24 \\
(-) & \underline{-2X^4 + 12X^3 - 24X^2 + 16X} \\
 & / \quad 3X^3 - 18X^2 + 36X - 24 \\
(-) & \underline{3X^3 - 18X^2 + 36X - 24} \\
 & / \quad / \quad / \quad /
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
 & 204 : 17 = 12 \\
(-) & \underline{17} \\
 & 34 \\
(-) & \underline{34} \\
 & //
\end{array}$$

Weitere Nullstellen von $f(X)$ sind die Nullstellen von $p(X) = X^2 - 2X - 3$

$\Leftrightarrow \xi_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2 = \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases} \Rightarrow p(X) = (X+1)(X-3)$ (vgl. auch VIETA)

Weitere Nullstellen von $g(X)$ sind die Nullstellen von $q(X) = X^2 - 2X + 3$

$\Leftrightarrow \xi_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-3} = 1 \pm i\sqrt{2}$ sind komplex. $\Rightarrow g(X)$ zerfällt nicht in Linearfaktoren $g(X) = (X-2)^3(X^2 - 2X + 3)$ i.G.z. $f(X) = (X-2)^3(X+1)(X-3)$

! **Zusatz:** Beweis von **2.** mit Hilfe des Hornerschemas

Effiziente Berechnung von $p(x_0)$ eines Polynoms $p(X)=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$:

$$p(x_0) = ((\cdots((a_n\cdot x_0 + a_{n-1})\cdot x_0 + a_{n-2})\cdot x_0 + \cdots + a_2)\cdot x_0 + a_1)\cdot x_0 + a_0 = \quad \text{(ausmultiplizieren)}$$

$$= a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + a_{n-2} x_0^{n-2} + \cdots + a_2 x_0^2 + a_1 x_0 + a_0$$

führt auf das **Hornerschema**

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots\ a_1 & a_0 \\
x_0 & & b_{n-1}\cdot x_0 & b_{n-2}\cdot x_0 & \cdots\ b_1 x_0 & b_0 x_0 \\
\hline
+ & \underline{b_{n-1}:=a_n} & b_{n-2}:=b_{n-1}x_0+a_{n-1} & b_{n-3}:=b_{n-2}x_0+a_{n-2} & \cdots\ b_0:=b_1x_0+a_1 & \underline{p(x_0)=b_0x_0+a_0}
\end{array}$$

allgemein: $\underline{b_{k-1} := b_k x_0 + a_k}$ für $k=1,\ldots,n-1$ (Def der b_k (*))

Behauptung: Mit $q(X):=\sum_{k=0}^{n-1} b_k X^k$ und $r=p(x_0)$ gilt $p(X)=q(X)\cdot(X-x_0)+r$

Beweis: $q(X)(X-x_0)+r = r+\sum_{k=0}^{n-1} b_k X^k(X-x_0) = r+\sum_{k=0}^{n-1} b_k X^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} b_k X^k x_0 =$

$$= r+\sum_{k=1}^{n} b_{k-1} X^k - \sum_{k=0}^{n-1} b_k X^k x_0 = \underbrace{r+b_0x_0}_{=a_0} + \sum_{k=1}^{n-1}\underbrace{(b_{k-1}-b_kx_0)}_{=a_k}X^k + \underbrace{b_{n-1}}_{=a_n}X^n = p(X)$$

mit (*) aus Hornerschema

$\Rightarrow$ Für $f(X)=X^5-8X^4+21X^3-14X^2-20X+24$:

$a_5=1 \quad a_4=-8 \quad a_3=21 \quad a_2=-14 \quad a_1=-20 \quad a_0=24$

$$\begin{array}{c|cccccc}
x_0=2 & & 2 & -12 & 18 & 8 & -24 \\
\hline
+ & b_4=1 & b_3=-6 & b_2=9 & b_1=4 & b_0=-12 & 0
\end{array}$$

$0=f(2) \wedge f(X)=p_1(X)\cdot(X-2)$ mit $p_1(X)=X^4-6X^3+9X^2+4X-12$

$$\begin{array}{c|ccccc}
x_0=2 & & 2 & -8 & 2 & 12 \\
\hline
+ & 1 & -4 & 1 & 6 & 0
\end{array}$$

$0=p_1(2) \wedge p_1(X)=p_2(X)(X-2)$ mit $p_2(X)=X^3-4X^2+X+6$

$$\begin{array}{c|cccc}
x_0=2 & & 2 & -4 & -6 \\
\hline
+ & 1 & -2 & -3 & 0
\end{array}$$

$0=p_2(2) \wedge p_2(X)=p_3(X)(X-2)$ mit $p_2(X)=X^2-2X-3$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{f(X)=(X^2-2X-3)(X-2)^2}}$