H 49. Zwei, Drei oder Sechs

Welche der nachfolgenden komplexen Zahlen sind 2–te Einheitswurzeln (linkes Kästchen), 3–te Einheitswurzeln (mittleres Kästchen) oder 6–te Einheitswurzeln (rechtes Kästchen)?

☐☐☐	i	☐☐☐	$\frac{5}{3}$
☐☐☐	-1	☐☐☐	$e^{i\frac{5}{3}\pi}$
☐☐☐	$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$	☐☐☐	$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$z \in \mathbb{C}$ heißt n-te Einheitswurzel (n-te EW) $\Leftrightarrow$

z ist (eventuell komplexe) Nullstelle des Polynoms $X^n-1 \Leftrightarrow z^n = 1$

<u>Folgerung</u>: $|z^n| = \sqrt{z^n \bar{z}^n} = \sqrt{(z\cdot\bar{z})^n} = \left(\sqrt{z\cdot\bar{z}}\right)^n = |z|^n = 1 \Rightarrow \underline{\underline{|z|=1}} \Rightarrow$

<u>Ansatz</u>: $z = e^{i\varphi}$ n-te EW $\Leftrightarrow z^n = e^{i\varphi n} = 1 \Leftrightarrow \varphi n = 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{\varphi = \frac{2k\pi}{n},\ k\in\mathbb{Z}}}$$

☐☐☐	i	$= e^{i\frac{2\pi}{4}}$ (4-te EW)
☒☐☒	-1	$= e^{i\pi} = e^{i\frac{2\pi}{2}} = e^{i\frac{6\pi}{6}}$
☐☐☐	$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$	$= \cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4}) = e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{2\pi}{8}}$ (8-te EW)
☐☐☐	$\frac{5}{3}$	$= \frac{5}{3}e^{i0}$ ↯ $\lvert z\rvert = 1$
☐☐☒	$e^{i\frac{5}{3}\pi}$	$= e^{i\frac{10\pi}{6}}$
☐☒☒	$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$	$= \cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3}) = e^{i\frac{2\pi}{3}} = e^{i\frac{4\pi}{6}}$

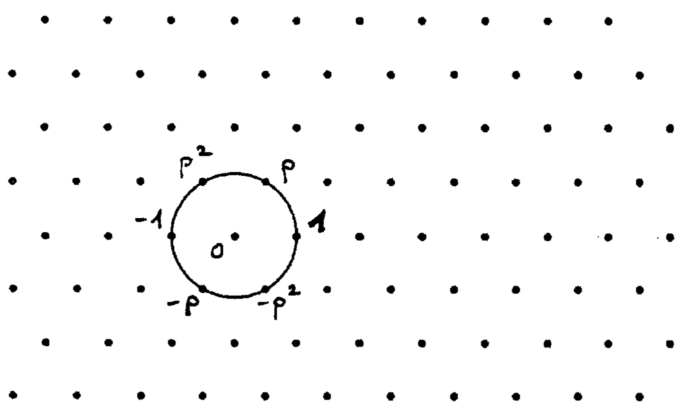
Dies kann man auch durch direktes Einsetzen in die Polynome X^2-1, X^3-1 und X^6-1 überprüfen.

H 50. Dreiecksgitter

Zur 6-ten Einheitswurzel $p = e^{i\frac{\pi}{3}}$ sei die Menge $\mathbb{Z}[p] = \{a + bp \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$ gegeben.

1. Skizzieren Sie die Menge $\mathbb{Z}[p]$ in der Ebene der komplexen Zahlen und zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[p]$ alle 6-ten Einheitswurzeln enthält.
2. Zeigen Sie, daß $\mathbb{Z}[p]$ zusammen mit der Addition und Multiplikation der komplexen Zahlen ein Ring ist.
3. Skizzieren Sie die Menge $2\mathbb{Z}[p] = \{2x \mid x \in \mathbb{Z}[p]\}$.
4. Zeigen Sie, daß $(2\mathbb{Z}[p], +)$ eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}[p], +)$ ist.
5. Wie viele Elemente hat die Quotientengruppe $\mathbb{Z}[p]/2\mathbb{Z}[p]$?
6. Für welche Zahl $x \in \mathbb{Z}[p]$ hat die Quotientengruppe $\mathbb{Z}[p]/x\mathbb{Z}[p]$ genau drei Elemente ?

1) Die Menge $\mathbb{Z}[p] = \{a + bp \mid a, b \in \mathbb{Z}$ ist ein Dreiecksgitter



Mit $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$ gilt:

$p = e^{\frac{\pi}{3}i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$

$p^2 = e^{\frac{2\pi}{3}i} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i = p - 1 \in \mathbb{Z}[p]$

$p^3 = e^{\frac{3\pi}{3}i} = -1 \in \mathbb{Z}[p]$

$p^4 = e^{\frac{4\pi}{3}i} = e^{\frac{3\pi}{3}i} e^{\frac{\pi}{3}i} = -1p \in \mathbb{Z}[p]$

$p^5 = e^{\frac{5\pi}{3}i} = e^{\frac{3\pi}{3}i} e^{\frac{2\pi}{3}i} = -1p^2 \in \mathbb{Z}[p]$

$p^6 = e^{\frac{6\pi}{3}i} = e^{2\pi i} = 1 = p^0 \in \mathbb{Z}[p]$

<u>Bemerkung</u>: Offenbar gilt: $\mathbb{Z}[p^2] = \mathbb{Z}[p]$!

2) $(\mathbb{Z}[p], +, \cdot)$ ist ein Ring, da

(i) $(\mathbb{Z}[p], +)$ eine abelsche Untergruppe der abelschen Gruppe $(\mathbb{C}, +)$ ist; da:

(Untergruppenkriterium)

- Nicht leer: Mit $a = b = 0 \Rightarrow 0 + 0 \cdot p = 0 \in \mathbb{Z}[p]$
- abgeschlossen: Für $a + bp \in \mathbb{Z}[p]$ und $c + dp \in \mathbb{Z}[p]$ gilt:
  $(a+bp) + (c+dp) = (a+c) + (b+d)p \in \mathbb{Z}[p]$, da $a+c, b+d \in \mathbb{Z}$
- enthält Inverses:
  Inverses in $(\mathbb{C}, +)$
  Zu $a + bp \in \mathbb{Z}[p]$ ist $-(a+bp) = (-a) + (-b)p \in \mathbb{Z}[p]$, da $-a, -b \in \mathbb{Z}$

(ii) $(\mathbb{Z}[p], \cdot)$ ist abgeschlossen und assoziativ, da wegen $p^2 = p - 1$ gilt

$(a+bp)(c+dp) = (ac + bdp^2) + (ad + bc)p =$

$= (ac - bd) + (ad + bc + bd)p \in \mathbb{Z}[p]$ da $ac - bd \in \mathbb{Z}$ und $ad + bc + bd \in \mathbb{Z}$

Die Assoziativität erbt $(\mathbb{Z}[p], \cdot)$ von $(\mathbb{C}, \cdot)$, da $\mathbb{Z}[p] \subseteq \mathbb{C}$!

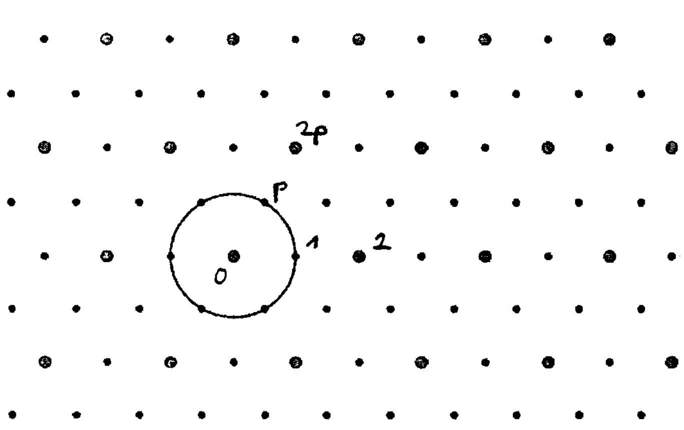
(iii) Die Distributivität erbt $(\mathbb{Z}[p], +, \cdot)$ von $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, da $\mathbb{Z}[p] \subseteq \mathbb{C}$!

Bemerkung: Da $1 \in \mathbb{Z}[p]$ und $(\mathbb{C},\cdot)$ kommutativ, ist $(\mathbb{Z}[p],+,\cdot)$ sogar ein kommutativer Ring mit Eins, jedoch kein Körper, da mit

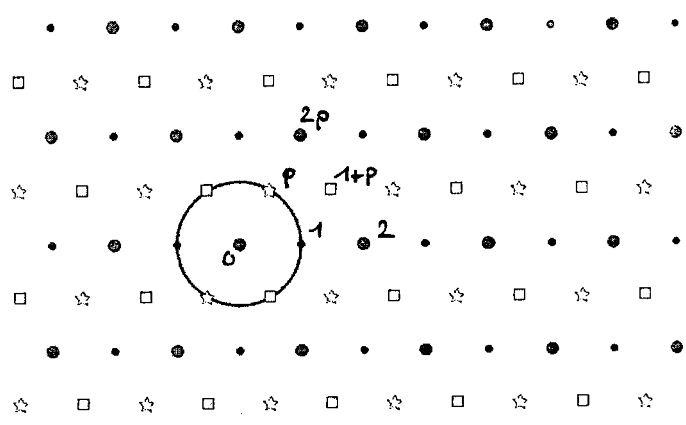
$\bar{p} = p^5 = 1-p \Rightarrow p\bar{p} = 1$ und $p+\bar{p}=1$ in $(\mathbb{C},\cdot)$ gilt:

$$\frac{1}{a+bp} = \frac{1}{a+bp}\cdot\frac{a+b\bar{p}}{a+b\bar{p}} = \frac{a+b-bp}{a^2+b^2+ab} = \frac{a+b}{a^2+b^2+ab} - \frac{b}{a^2+b^2+ab}\,p$$ i.a. nicht in $\mathbb{Z}[p]$ liegt.

3) Die Menge $2\cdot\mathbb{Z}[p] = \{a+bp \mid a,b \in 2\mathbb{Z}\}$ ist ein Untergitter von $\mathbb{Z}[p]$



$2\cdot\mathbb{Z}[p] = \{$ große runde Punkte $\}$



Skizze der Nebenklassen

4) $(2\cdot\mathbb{Z}[p],+)$ ist Untergruppe von $(\mathbb{Z}[p],+)$, da

(Untergruppenkriterium)

- Nicht leer: Mit $a=b=0 \Rightarrow 0+0\cdot p = 0 \in 2\mathbb{Z}[p]$
- abgeschlossen: Für $a+bp,\ c+dp \in 2\cdot\mathbb{Z}[p]$, d.h. $a,b,c,d \in 2\cdot\mathbb{Z}$ gilt:
  $(a+bp)+(c+dp) = (a+c)+(b+d)p \in 2\cdot\mathbb{Z}[p]$, da $a+c,\ b+d \in 2\cdot\mathbb{Z}$.
- enthält Inverses: $a,b \in 2\mathbb{Z}$!
  Zu $a+bp \in 2\cdot\mathbb{Z}[p]$ ist $-(a+bp) = (-a)+(-b)p \in 2\cdot\mathbb{Z}[p]$, da $-a,-b \in 2\cdot\mathbb{Z}$

5) Es gilt: $\mathbb{Z}[p]/2\cdot\mathbb{Z}[p] = \{0+2\cdot\mathbb{Z}[p],\ 1+2\cdot\mathbb{Z}[p],\ p+2\cdot\mathbb{Z}[p],\ 1+p\cdot 2\cdot\mathbb{Z}[p]\}$

Betrachte Mengen der großen runden Punkte, kleinen runden Punkte, Sterne, Quadrate

Die Vereinigung dieser vier Nebenklassen liefert offensichtlich $\mathbb{Z}[p]$.

6) Mit $x = 1+p$ erhält man wegen

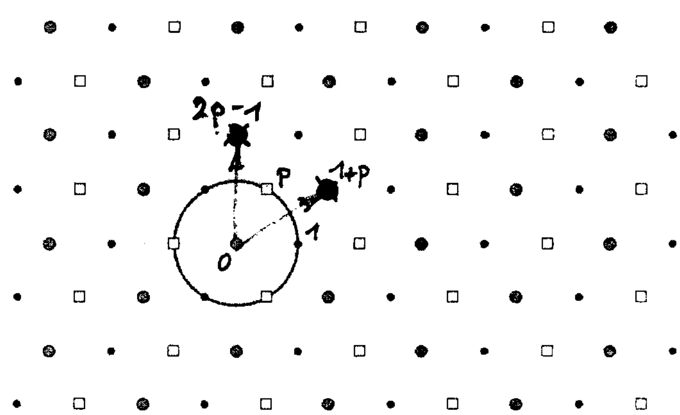
$(1+p)(a+bp) = a\cdot(1+p) + b\cdot(p+p^2)$

$(p^2 = p-1) \qquad = a(1+p) + b(2p-1)$

eine Untergruppe $x\cdot\mathbb{Z}[p]$ von $\mathbb{Z}[p]$

mit 3 Nebenklassen von $\mathbb{Z}[p]/x\mathbb{Z}[p]$

vgl. Mengen der großen runden bzw kleinen runden Punkte und der Quadrate.



Bemerkung: Man kann zeigen: Für $x = 1+p$ hat $\mathbb{Z}[p]/x\mathbb{Z}[p]$ min Anzahl von Elementen

H 51. Komplexe Uhr

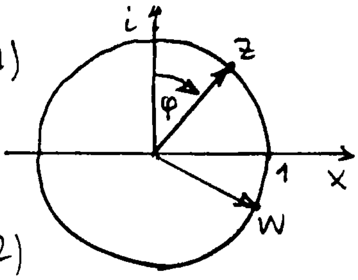
Bei einer analogen Uhr bewegen sich der Stundenzeiger und der Minutenzeiger gleichmäßig und liegen zu „High Noon" exakt übereinander.

1. Fassen Sie den großen und den kleinen Zeiger als Punkte auf dem komplexen Einheitskreis auf und geben Sie die Bewegung des großen Zeigers als Funktion $f(z)$ der Position des kleinen Zeigers an.

2. Zu welchen Zeiten liegen die beiden Zeiger übereinander ?

3. Können bei einer Uhr mit Sekundenzeiger die drei Zeiger außer zu „High Noon" nochmals exakt übereinander liegen ?

1)



kleiner Zeiger $z = i \cdot e^{-i\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi[$

großer Zeiger w ist 12 mal so schnell wie kleiner Zeiger

$\Rightarrow w = f(z) = i \cdot z^{12}$

2) $w = z \Leftrightarrow f(z) = z \Leftrightarrow e^{-12i\varphi} = e^{-i\varphi} \Leftrightarrow e^{11i\varphi} = 1$

$\Leftrightarrow 11\varphi = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ $\Leftrightarrow \varphi_1 = \frac{2\pi}{11} k = \frac{360°}{11} \cdot k$ o.E. $k = 0, 1, 2, \dots, 10$.

geom. Deutung: Die beiden Zeiger liegen genau dann übereinander, wenn sie auf die Ecken des regelmäßigen 11 Ecks zeigen, dessen eine Ecke auf „High Noon" liegt.

3) Der Sekundenzeiger ist $12 \cdot 60 = 720$ mal so schnell wie der kleine Zeiger

$\Rightarrow s = g(z) = i\, z^{720} \Rightarrow s = z \Leftrightarrow e^{-720 i\varphi} = e^{-i\varphi} \overset{\text{analog}}{\Leftrightarrow} \varphi_2 = \frac{2\pi}{719} l = \frac{360°}{719} \cdot l$, $0 \leq l \leq 718$

Frage $\exists\, 0 \leq k \leq 10,\ 0 \leq l \leq 718 : \varphi_1 = \varphi_2 \Leftrightarrow 719 \cdot k = 11 \cdot l$ ↯ nein da teilerfrem