TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

PROF. DR.DR. JÜRGEN RICHTER-GEBERT, DR. HERMANN VOGEL

Lineare Algebra und analytische Geometrie 1 & Mathematik für Physiker 1 (WS 2007/08)

— Aufgabenblatt 06 (3. Dezember 2007) —

— Präsenzaufgaben —

P 46. Wir drehen uns im Kreis

Zu $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge der n–ten Einheitswurzeln gegeben durch

$$\Omega_n = \left\{ e^{i\frac{k}{n}2\pi} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

1. Zeigen Sie, dass Ω_n zusammen mit der Multiplikation der komplexen Zahlen eine Gruppe ist.
2. Bestimmen Sie die kartesischen Koordinaten der sechsten Einheitswurzeln und geben Sie die zugehörigen Punkte auf dem Einheitskreis an.
3. Bestimmen Sie sämtliche Untergruppen von Ω_6.
4. Geben Sie zu den nicht-trivialen Untergruppen von Ω_6 jeweils sämtliche Nebenklassen von Ω_6 an.
5. Weisen Sie nach, dass die Gruppen $(\Omega_n, \cdot)$ und $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \oplus)$ isomorph sind.

P 47. Radikale

Gegeben sei das Polynom $p \in \mathbb{C}[X]$ mit $\quad p(X) = X^4 + 7 + 24i. \quad$ Bestimmen Sie sämtliche Nullstellen von p.

— Zentrale Präsenzaufgaben —

Z 48. Nullstellenbestimmung

Aus dem Fundamentalsatz der Algebra folgt:
Jedes reelle Polynom $p \in \mathbb{R}[X]$ vom Grad $deg(p) = n \geq 1$ besitzt mindestens eine Nullstelle $\xi \in \mathbb{C}$ (d.h. $p(\xi) = 0$).
Nach Aufgabe **P 41** ist dann auch die zu ξ konjugierte Zahl $\overline{\xi}$ Nullstelle von p (d.h. $p(\overline{\xi}) = 0$).

1. Folgern Sie daraus, dass jedes Polynom $p \in \mathbb{R}[X]$ mit ungeradem Grad mindestens eine *reelle* Nullstelle besitzt.
2. Zeigen Sie, dass $\xi = 2$ dreifache Nullstelle der Polynome

$$f(X) := X^5 - 8X^4 + 21X^3 - 14X^2 - 20X + 24$$

und

$$g(X) := X^5 - 8X^4 + 27X^3 - 50X^2 + 52X - 24$$

ist. Bestimmen Sie auch die übrigen Nullstellen von $f(X)$ und $g(X)$.

— Hausaufgaben —

H 49. Zwei, Drei oder Sechs

Welche der nachfolgenden komplexen Zahlen sind 2–te Einheitswurzeln (linkes Kästchen), 3–te Einheitswurzeln (mittleres Kästchen) oder 6–te Einheitswurzeln (rechtes Kästchen)?

$\square\square\square$	i	$\square\square\square$	$\dfrac{5}{3}$
$\square\square\square$	-1	$\square\square\square$	$e^{i\frac{5}{3}\pi}$
$\square\square\square$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\, i$	$\square\square\square$	$-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\, i$

H 50. Dreiecksgitter

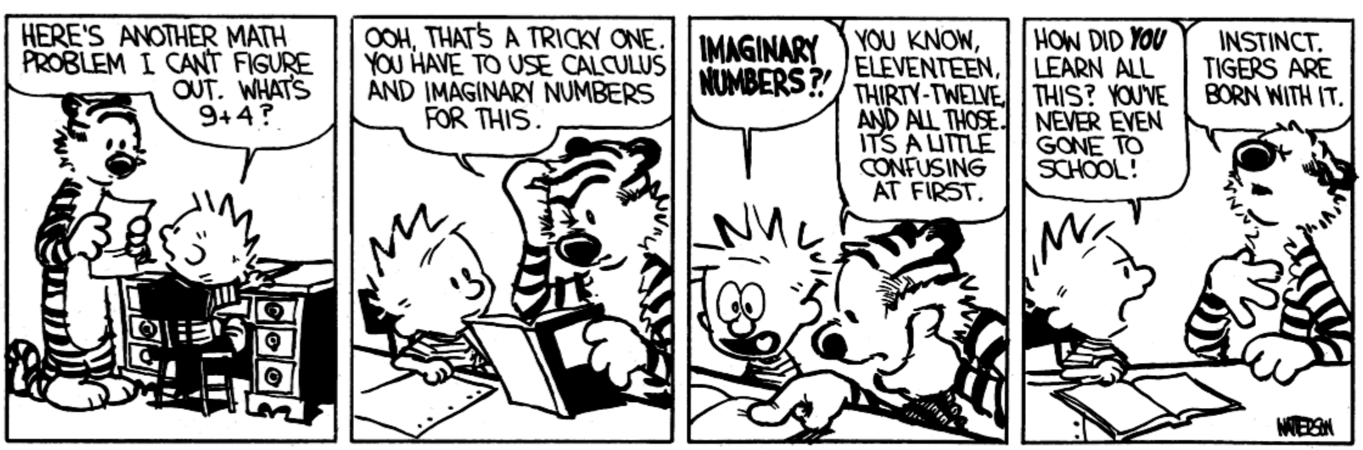
Zur 6-ten Einheitswurzel $p = e^{i\frac{\pi}{3}}$ sei die Menge $\mathbb{Z}[p] = \{a + bp \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$ gegeben.

1. Skizzieren Sie die Menge $\mathbb{Z}[p]$ in der Ebene der komplexen Zahlen und zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[p]$ alle 6-ten Einheitswurzeln enthält.
2. Zeigen Sie, daß $\mathbb{Z}[p]$ zusammen mit der Addition und Multiplikation der komplexen Zahlen ein Ring ist.
3. Skizzieren Sie die Menge $2\mathbb{Z}[p] = \{2x \mid x \in \mathbb{Z}[p]\}$.
4. Zeigen Sie, daß $(2\mathbb{Z}[p], +)$ eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}[p], +)$ ist.
5. Wie viele Elemente hat die Quotientengruppe $\mathbb{Z}[p]/2\mathbb{Z}[p]$?
6. Für welche Zahl $x \in \mathbb{Z}[p]$ hat die Quotientengruppe $\mathbb{Z}[p]/x\mathbb{Z}[p]$ genau drei Elemente ?

H 51. Komplexe Uhr

Bei einer analogen Uhr bewegen sich der Stundenzeiger und der Minutenzeiger gleichmäßig und liegen zu „High Noon“ exakt übereinander.

1. Fassen Sie den großen und den kleinen Zeiger als Punkte auf dem komplexen Einheitskreis auf und geben Sie die Bewegung des großen Zeigers als Funktion $f(z)$ der Position des kleinen Zeigers an.
2. Zu welchen Zeiten liegen die beiden Zeiger übereinander ?
3. Können bei einer Uhr mit Sekundenzeiger die drei Zeiger außer zu „High Noon“ nochmals exakt übereinander liegen ?



Abgabetermin ist der 17.12.2007 bis 12:00 Uhr (Einwurfkasten im Untergeschoss des FMI-Gebäudes).