P 39. Ist $(R, \oplus, \odot)$ ein Ring, M eine beliebige nichtleere Menge und $S = \text{Abb}\,(M; R)$ die Menge aller Abbildungen von M nach R, so ist auf S durch

$$(f+g)(m) := f(m) \oplus g(m), \qquad (f \cdot g)(m) := f(m) \odot g(m),$$

eine Addition und eine Multiplikation erklärt.

1. Zeigen Sie, dass $(S, +, \cdot)$ auf diese Weise zu einem Ring wird.
2. Ist S ein Körper, falls R ein Körper ist?

1.) Zu zeigen:

- $(S,+)$ ist kommutative (abelsche) Gruppe

(0) abgeschlossen: Für $f,g \in S$ gilt: $k: \begin{cases} M \to R \\ m \mapsto k(m) \end{cases}$ mit $k(m) := \underbrace{f(m) \oplus g(m)}_{\in R}$ $\forall m \in M$ liegt in $S \Rightarrow k = f+g \in S$

(i) neutrales Element: Suche $f = 0_S$ so, dass $f+g = g$

$\Leftrightarrow (f+g)(m) = f(m) \oplus g(m) = g(m)$ $\forall m \in M \Rightarrow f(m) = \underset{\text{Null in } (R,\oplus)}{0_R}$ $\forall m \Rightarrow \underset{\text{Nullabbildung}}{0_S} = f: \begin{cases} M \to R \\ m \mapsto 0_R \end{cases}$

(ii) Inverses Element: Suche f zu $g \in S$ so, dass $f+g = 0_S$

$\Leftrightarrow (f+g)(m) = f(m) \oplus g(m) = 0_S(m) = 0_R$ $\forall m \in M \Rightarrow f(m) = \ominus g(m)$ $\forall m \Rightarrow f: \begin{cases} M \to R \\ m \mapsto \ominus g(m) \end{cases}$

ist das inverse Element zu $g \in S$ in S (inverses Element zu $g(m)$ in $(R,\oplus)$)

(iii) kommutativ: Für $f,g \in S$ gilt:

$(f+g)(m) = f(m) \oplus g(m) = g(m) \oplus f(m) = (g+f)(m)$ $\forall m \in M \Leftrightarrow f+g = g+f$

(iv) assoziativ: Für $f,g,h \in S$ gilt: $(f+g)+h = f+(g+h)$ da:

$((f+g)+h)(m) = (f+g)(m) \oplus h(m) = (f(m) \oplus g(m)) \oplus h(m) =$

$= f(m) \oplus (g(m) \oplus h(m)) = f(m) \oplus (g+h)(m) = (f+(g+h))(m)$ $\forall m \in M$

- $(S,\cdot)$ ist abgeschlossen und assoziativ
  - abgeschlossen: Für $f,g \in S$ gilt: $k: \begin{cases} M \to R \\ m \mapsto k(m) \end{cases}$ mit $k(m) := \underbrace{f(m) \odot g(m)}_{\in R}$ $\forall m \in M$ liegt in $S \Rightarrow k = f \cdot g \in S$
  - assoziativ: Für $f,g,h \in S$ gilt: $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$ da:

$((f \cdot g) \cdot h)(m) = (f \cdot g)(m) \odot h(m) = (f(m) \odot g(m)) \odot h(m) =$

$= f(m) \odot (g(m) \odot h(m)) = f(m) \odot (g \cdot h)(m) = (f \cdot (g \cdot h))(m)$ $\forall m \in M$

- $(S,+,\cdot)$ ist distributiv: $\forall f,g,h \in S$ gilt
- $f \cdot (g+h) = f \cdot g + f \cdot h$ da: $(f \cdot (g+h))(m) = f(m) \odot (g+h)(m) = f(m) \odot (g(m) \oplus h(m)) =$

$= f(m) \odot g(m) \oplus f(m) \odot h(m) = (f \cdot g)(m) \oplus (f \cdot h)(m) = (f \cdot g + f \cdot h)(m)$ $\forall m \in M$

- $(g+h) \cdot f = g \cdot f + h \cdot f$ da: $((g+h) \cdot f)(m) = (g+h)(m) \odot f(m) = (g(m) \oplus h(m)) \odot f(m) =$

$= g(m) \odot f(m) \oplus h(m) \odot f(m) = (g \cdot f)(m) \oplus (h \cdot f)(m) = (g \cdot f + h \cdot f)(m)$ $\forall m \in M$

2.) Ist R ein Körper $\Rightarrow$ R besitzt eine Eins 1_R (neutrales Element der Multiplikation)

Frage: Enthält dann auch S eine Eins 1_S? Suche $f \in S \setminus \{0_S\}$ mit $f \cdot g = g$

$\Leftrightarrow (f \cdot g)(m) = f(m) \odot g(m) = g(m) \quad \forall m \in M \Leftrightarrow f(m) = 1_R \ \forall m \in M \Rightarrow 1_S = f : \begin{cases} M \to R \\ m \mapsto 1_R \end{cases}$

Zum Nachweis, ob S ein Körper ist, bleibt zu prüfen, ob

$\forall g \in S \setminus \{0_S\} \ \exists f \in S \setminus \{0_S\} : f \cdot g = 1_S \Leftrightarrow f(m) \odot g(m) = (f \cdot g)(m) = (1_S)(m) = 1_R \quad \forall m \in M \ (*)$

Fallunterscheidung:

a) Für $|M| > 1$, $m_0 \in M$ betrachte $g(m) := \begin{cases} 0_R & \text{für } m \neq m_0 \\ 1_R & \text{für } m = m_0 \end{cases}$, d.h. $g \in S \setminus \{0_S\}$

Für $m \neq m_0$ folgt dann aus $(*)$ $0_R = 1_R$ ↯ $\Rightarrow$ Für $|M| > 1$ $\nexists$ Inverses zu g bzgl. $\cdot$

$\Rightarrow$ Für $|M| > 1$ ist $(S, +, \cdot)$ kein Körper

b) Für $|M| = 1$ gilt $M = \{m_0\}$ und zu $g : \begin{cases} \{m_0\} \to R \\ m_0 \mapsto g(m_0) \neq 0_R \end{cases}$, d.h. $g \in S \setminus \{0_S\}$

existiert nach $(*)$ $f(m_0) = (g(m_0))^{-1}$, d.h. $f = g^{-1} : \begin{cases} \{m_0\} \to R \\ m_0 \mapsto (g(m_0))^{-1} \end{cases}$, d.h. $g^{-1} \in S \setminus \{0_S\}$

(inverses Element zu $g(m_0)$ in $(R \setminus \{0_R\}, \odot)$) (inverses Element zu g in $(S \setminus \{0_S\}, \cdot)$)

Bleibt zu zeigen: $(S, \cdot)$ ist kommutativ, d.h. für $f, g \in S$ gilt:

$(f \cdot g)(m) = f(m) \odot g(m) \underset{\uparrow}{=} g(m) \odot f(m) = (g \cdot f)(m) \quad \forall m \in M \Leftrightarrow f \cdot g = g \cdot f$

$(R, \odot)$ ist kommutativ, da $(R, \oplus, \odot)$ ein Körper

Für $|M| = 1$ ist also $(S, +, \cdot)$ ein Körper, falls $(R, \oplus, \odot)$ ein Körper ist.

P 40. Darstellungsformen komplexer Zahlen

Eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ lässt sich darstellen

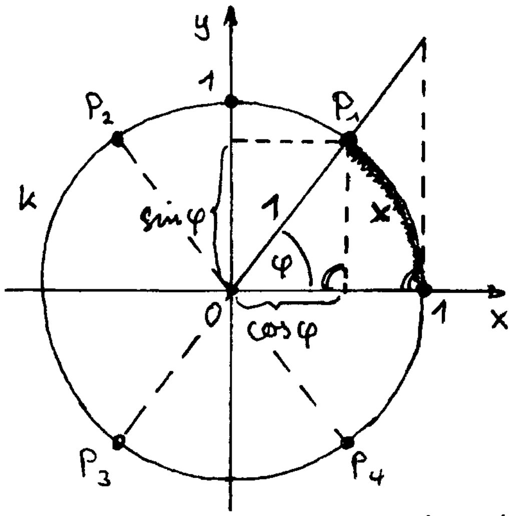
- in *Normalform* oder *kartesischer Form* : $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$
- in *trigonometrischer Form*: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ mit $r, \varphi \in \mathbb{R}$
- in *Exponentialform*: $z = re^{i\varphi}$ mit $r, \varphi \in \mathbb{R}$

Das Tupel (a, b) beschreibt die *kartesischen Koordinaten* der komplexen Zahl z in der *Gaußschen Zahlenebene* $\mathbb{R}\times i\mathbb{R}$. Das Tupel (r, φ) gibt die komplexe Zahl z in *Polarform* an, wobei $r \in \mathbb{R}^+$ und φ aus einem Intervall der Länge 2π gewählt werden können.

1. Wie lassen sich kartesische Form und Polarform einer komplexen Zahl ineinander umrechnen ?
2. Geben Sie folgende komplexe Zahlen in allen drei möglichen Darstellungsformen an:

   a) $2e^{i\frac{2}{3}\pi}$ b) $3 + 4i$ c) $-(\sqrt{5}+1) - i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$
3. Welche Vorteile haben die verschiedenen Darstellungen beim Rechnen mit komplexen Zahlen ?

Zur Erinnerung: Winkelfunktionen am Einheitskreis $r=1$ bzw. rechtwinkligem Dreieck für $0 \le \varphi \le 90°$



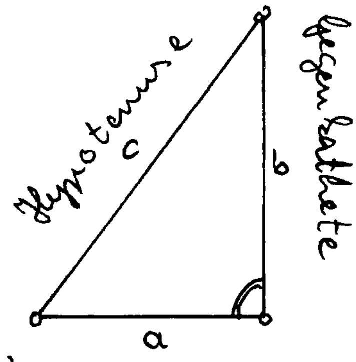
$(r=1)$

$\sin\varphi = \frac{b}{c}$

$\cos\varphi = \frac{a}{c}$

$\tan\varphi = \frac{b}{a} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$

(für $\varphi \neq \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi, k\in\mathbb{Z}$) Ankathete



Kreisumfang $u = 2r\pi = 2\pi$

Gradmaß $180°$ $\hat{=}$ Bogenmaß π

Gradmaß φ $\Rightarrow$ Bogenmaß $x = \varphi\cdot\frac{\pi}{180°}$

Bogenmaß x $\Rightarrow$ Gradmaß $\varphi = x\cdot\frac{180°}{\pi}$

Satz von Pythagoras:

$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow$

$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$

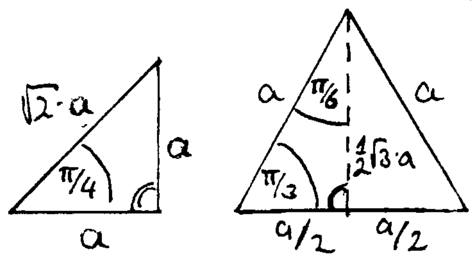
Bem: Wir rechnen im Folgenden i.d.R. mit dem Bogenmaß! und bezeichnen es mit griechischen Buchstaben.

Beachte die Vorzeichen der Winkelfunktionen je nach Lage von P in den vier Quadranten insbesondere: $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$, $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$

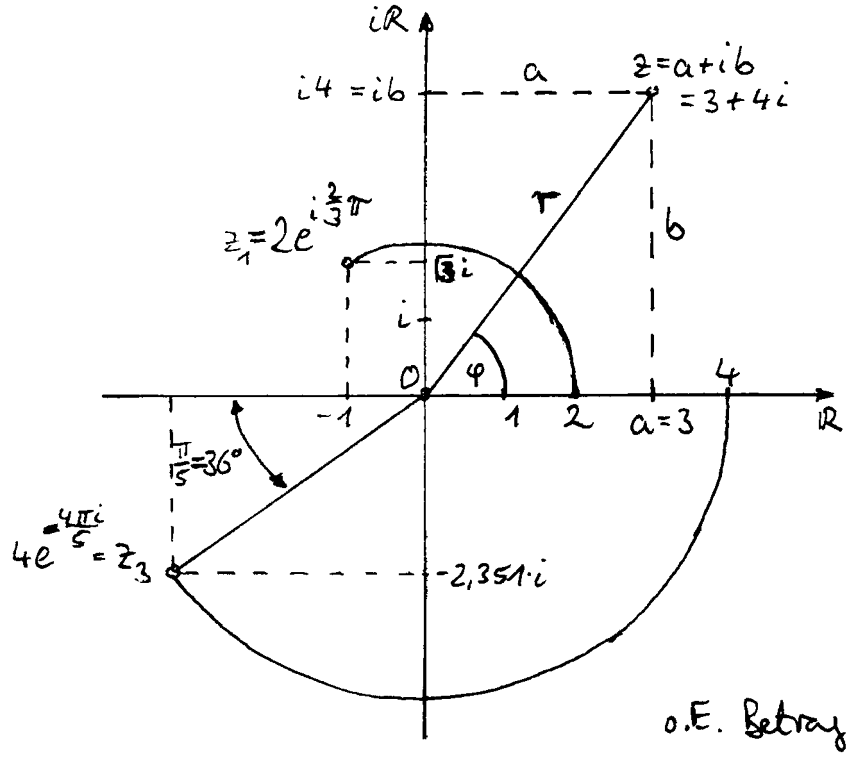
spezielle Winkel: $\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\sin(0) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$; $\sin(\frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$

$\sin(\frac{\pi}{2}) = \cos(0) = 1$; $\sin(\frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$



1) Gaußsche Zahlenebene $\mathbb{R} \times i\mathbb{R}$



Komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$

kartesische Form (a,b):

$z = a + ib \quad , \; a, b \in \mathbb{R}$

Polarform (r, φ):

$z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Eulerformel $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

Exponential bzw trigonometrische
Form Form

Dabei ist φ nur bis auf ein Vielfaches von 2π bestimmt!

o.E. Betrag $|z| = r > 0$, Argument $\varphi \in]-\pi, \pi[$

Polarform $(r, \varphi) \to$ Kartesische Form (a, b)

$z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = (\underbrace{r\cos\varphi}_{=a}) + i(\underbrace{r\sin\varphi}_{=b}) = a + ib$

mit Transformationsgleichungen $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$

Kartesische Form $(a, b) \to$ Polarform (r, φ)

$z = a + i \cdot b \Rightarrow r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos\varphi = \frac{a}{r}$ für $r \neq 0$ $\Leftrightarrow$

$\varphi = \text{vorz}(b) \cdot \arccos\left(\frac{a}{r}\right)$ für $r \neq 0$. Für $r = 0$ ist φ unbestimmt!

Vorzeichen von b! $\text{vorz}(b) := \begin{cases} +1 & \text{für } b \geq 0 \\ -1 & \text{für } b < 0 \end{cases}$ $(\arccos: [-1,1] \to [0, \pi])$

Bem: Man kann φ auch aus $\tan\varphi = \frac{b}{a}$ bestimmen.

2a) $z = 2e^{i\frac{2}{3}\pi} = 2(\underbrace{\cos(\tfrac{2}{3}\pi)}_{= -1/2} + i\underbrace{\sin(\tfrac{2}{3}\pi)}_{= 1/2\sqrt{3}}) = -1 + i\sqrt{3}$, $\frac{2}{3}\pi = 120°$ (vgl. Skizze z_1)

Exp. Form trigon. Form kart. Form

b) $z = 3 + 4i \Rightarrow r = |z| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$, $\varphi = (+1) \cdot \arccos\frac{3}{5} \approx 0{,}9273 \approx 53{,}13°$

kart. Form $\Rightarrow z = 5 \cdot e^{0{,}9273 \cdot i} = 5 \cdot (\cos(0{,}9273) + i\sin(0{,}9273))$

Exp. Form trigon. Form (vgl. Skizze z)

c) $z = -(\sqrt{5} + 1) - i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \approx -3{,}236 - 2{,}351 \cdot i$ (kart. Form) $\Rightarrow$

$r = |z| = \sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2 + (\sqrt{10 - 2\sqrt{5}})^2} = \sqrt{6 + 2\sqrt{5} + 10 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{16} = 4$,

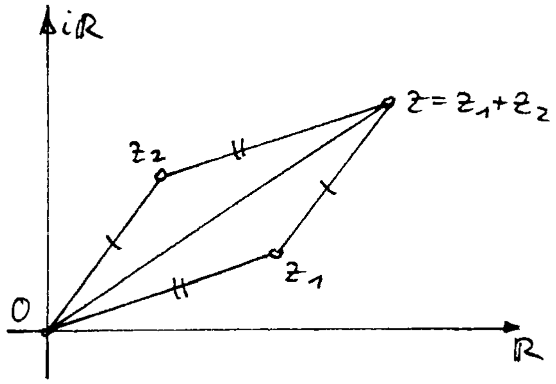
(vgl. Skizze z_3)

$\varphi = (-1) \cdot \arccos\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right) = -\frac{4}{5}\pi = -144°$ (exakt)

$b \approx -2{,}351 < 0$ mit CAS oder Formeln für regelmäßiges Fünfeck/Zehneck

$\Rightarrow z = 4 \cdot e^{-i\frac{4}{5}\pi} = 4 \cdot (\cos(-\tfrac{4}{5}\pi) + i\sin(-\tfrac{4}{5}\pi))$ (exp. bzw. trigon. Form)

3) Für Addition/Subtraktion ist die kartesische Form günstiger



$z_1=a_1+ib_1$, $z_2=a_2+ib_2$ $\Rightarrow$

$z=z_1+z_2=(a_1+a_2)+i\cdot(b_1+b_2)$

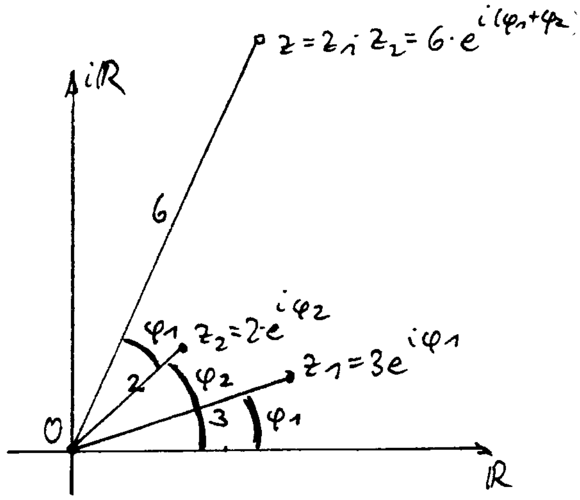
geom. Deutung: Translation

Bem: $e^{i\alpha}+e^{i\beta}=(\cos\alpha+\cos\beta)+i(\sin\alpha+\sin\beta)=$

(Formelsammlung) $= 2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+i\cdot 2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=$

$= 2\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$

Für Produkt/Division und Potenzen ist die Exponentialform günstiger



$z_1=r_1e^{i\varphi_1}$, $z_2=r_2e^{i\varphi_2}$ $\Rightarrow$

$z=z_1\cdot z_2=r_1e^{i\varphi_1}\cdot r_2e^{i\varphi_2}=r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$

geom. Deutung: Drehstreckung

Bem: $e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$

$ \parallel$

$e^{i\alpha}\cdot e^{i\beta} = (\cos\alpha+i\sin\alpha)\cdot(\cos\beta+i\sin\beta)$

$= (\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+i(\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta)$

$\Rightarrow$ bekannte Additionstheoreme der Winkelfunktionen

P 41. Rechnen wie verhext mit konjugiert komplex

Es sei $z = a + bi \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Die zu z konjugierte Zahl $\overline{z}$ ist $\overline{z} = a - bi$. Der Realteil $\mathrm{Re}(z)$ von z ist a, und der Imaginärteil $\mathrm{Im}(z)$ von z ist b. Die Länge $|z|$ von z ist $\sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$.

1. Bestimmen Sie $\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)$ und $|z|$ in Abhängigkeit von z und $\overline{z}$.
2. Überprüfen Sie die beiden Rechenregeln: Für alle $x, y \in \mathbb{C}$ gilt: a) $\overline{x} + \overline{y} = \overline{x + y}$, b) $\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{x \cdot y}$.
3. Beweisen Sie, dass eine komplexe Zahl z genau dann reell ist, wenn $z = \overline{z}$ gilt.
4. Es sei $p \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom in X vom Grad $n \in \mathbb{N}$.

   Man zeige: Ist $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p, dann ist auch $\overline{z}$ eine Nullstelle von p.

1.) $z = a + bi$, $\overline{z} = a - bi$ $\Leftrightarrow$ $z + \overline{z} = 2a$, $z - \overline{z} = 2bi$ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Re}(z) = a = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(z) = b = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}) = -\frac{i}{2}(z - \overline{z}) \in \mathbb{R}$

$z \cdot \overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2 = |z|^2 \Rightarrow |z| = \sqrt{z\overline{z}}$

2.) Es seien $x = a + bi$, $y = c + di$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

a) • $\overline{x} + \overline{y} = \overline{a+bi} + \overline{c+di} = a - bi + c - di = a + c - (b+d)i$

• $\overline{x+y} = \overline{a+bi+c+di} = \overline{(a+c)+(b+d)i} = a + c - (b+d)i$ ✓

b) • $\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{(a+bi)} \cdot \overline{(c+di)} = (a-bi)\cdot(c-di) = (ac-bd) - (ad+bc)i$

• $\overline{x \cdot y} = \overline{(a+bi)\cdot(c+di)} = \overline{(ac-bd)+(ad+bc)i} = (ac-bd) - (ad+bc)i$ ✓

3) $z = \overline{z} \Leftrightarrow a + ib = a - ib \Leftrightarrow 2bi = 0 \Leftrightarrow b = 0$ ✓

4) Für das Polynom $p(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ vom Grad n, d.h. mit $a_n \neq 0$

sei $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle, d.h. $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = 0$ $(*)$ $\Rightarrow$

$$p(\overline{z}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{z}^k \overset{2b)}{=} \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} \cdot \overline{z^k} \overset{2b)}{=} \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k \cdot z^k} \overset{2a)}{=} \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k} \overset{(*)}{=} \overline{p(z)} = \overline{0} = 0$$

$a_k = \overline{a_k}$ da $a_k \in \mathbb{R}$ $\forall k = 0, \dots, n$!