H 42. Polynomring

Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring und $R[x] := \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mid n \in \mathbb{N},\ a_i \in R \right\}$ die Menge der Polynome in x mit Koeffizienten aus R. Den höchsten Exponenten eines Polynoms $p(x)$ mit nicht verschwindendem Koeffizienten nennt man $grad(p)$ und identifiziert für $n < m$: $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \cdots + a_m x^m$ mit $a_{n+1} = \cdots = a_m = 0$ mit $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, wobei die Summen formal nach Potenzen von x geordnet werden können.

Zeigen Sie, dass $(R[x], +, \cdot)$ bezüglich der üblichen Addition und Multiplikation von Polynomen ein Ring ist.

Hinweis: Der explizite Nachweis der Assoziativität der Multiplikation darf weggelassen werden.

Zu zeigen:

- $(R[x], +)$ ist kommutative (abelsche) Gruppe

(0) (iv) abgeschlossen und kommutativ:

für $f, g \in R[x]$ mit $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $g = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$; $a_i, b_i \in R$ gilt mit $p := \max(n, m)$

$$f + g = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{m} b_i x^i = \sum_{i=0}^{p} a_i x^i + \sum_{i=0}^{p} b_i x^i = \sum_{i=0}^{p} (a_i x^i + b_i x^i) = \sum_{i=0}^{p} \underbrace{(a_i + b_i)}_{\in R} x^i \in R[x]$$

(setze $a_i = 0$ für $n < i \le p$ und $b_i = 0$ für $m < i \le p$)

$$= \sum_{i=0}^{p} (b_i + a_i) x^i = \sum_{i=0}^{p} (b_i x^i + a_i x^i) = \sum_{i=0}^{p} b_i x^i + \sum_{i=0}^{p} a_i x^i = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i + \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = g + f$$

(i) neutrales Element: $f = 0 \in R[x]$ für $n = 0 \wedge a_0 = 0$ ist offensichtlich das neutr. El.

(ii) inverses Element: Zu $g = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$ ist $f := \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ mit $a_i = -b_i$ für $1 \le i \le m$ offensichtlich das inverse Element [inverses Element zu b_i in $(R, +)$]

(iii) assoziativ: für $f, g, h \in R[x]$ mit

$f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $g = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$, $h = \sum_{i=0}^{p} c_i x^i$; $a_i, b_i, c_i \in R$ gilt mit $q := \max(m, n, p)$

$$(f+g)+h = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{m} b_i x^i\right) + \sum_{i=0}^{p} c_i x^i = \left[\sum_{i=0}^{q} a_i x^i + \sum_{i=0}^{q} b_i x^i\right] + \sum_{i=0}^{q} c_i x^i =$$

(setze $a_i = 0$ für $n < i \le q$, $b_i = 0$ für $m < i \le q$ und $c_i = 0$ für $p < i \le q$)

$$= \sum_{i=0}^{q} (a_i + b_i) x^i + \sum_{i=0}^{q} c_i x^i = \sum_{i=0}^{q} [(a_i + b_i) + c_i] x^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{q} [a_i + (b_i + c_i)] x^i = \sum_{i=0}^{q} a_i x^i + \sum_{i=0}^{q} (b_i + c_i) x^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{q} a_i x^i + \left[\sum_{i=0}^{q} b_i x^i + \sum_{i=0}^{q} c_i x^i\right] = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \left[\sum_{i=0}^{m} b_i x^i + \sum_{i=0}^{p} c_i x^i\right] = f + (g + h)$$

- $(R[x], \cdot)$ ist abgeschlossen und assoziativ (Nachweis der Ass. nicht verlangt!)

  - abgeschlossen: für $f, g \in R[x]$ mit $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $g = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$; $a_i, b_i \in R$ gilt:

$$f \cdot g = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{m} b_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{n+m} \left(\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}\right) x^i = \sum_{i=0}^{n+m} \underbrace{\left(\sum_{j+k=i} a_j b_k\right)}_{\in R} x^i \in R[x]$$

(*) (setze $a_i = 0$ für $n < i \le n+m$ und $b_i = 0$ für $m < i \le n+m$) (Beachte: Summe der Indizes gleich i) (Summe über alle j, k mit $j + k = i \wedge 0 \le j, 0 \le k$)

Bemerkungen:

1) $(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i)\cdot(\sum_{i=0}^{m} b_i x^i) = (a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n)\cdot(b_0+b_1x+b_2x^2+\dots+b_mx^m) =$

$= a_0b_0 + (a_0b_1+a_1b_0)x + (a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+\dots+a_nb_mx^{n+m} = \sum_{i=0}^{n+m}(\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j})x^i$

↑ Ausmultiplizieren und Ordnen nach Potenzen von x unter Beachtung der Reihenfolge von a_i und b_j; $(R,\cdot)$ muss nicht kommutativ sein!

2) In dieser Summe ergibt sich wegen (*)

für $i=n+m$ der letzte Summand als

$$(\sum_{j=0}^{n+m} a_j b_{n+m-j})x^{n+m} = [\sum_{j=0}^{n-1} a_j \underbrace{b_{n+m-j}}_{=0 \text{ nach } (*)} + a_nb_m + \sum_{j=n+1}^{n+m} \underbrace{a_j}_{=0 \text{ nach } (*)} b_{n+m-j}]x^{n+m} = a_nb_mx^{n+m}$$

für $i=n+m-1$ der vorletzte Summand als $(\sum_{j=0}^{n+m-1} a_j b_{n+m-1-j})x^{n+m-1} =$

$$=[\sum_{j=0}^{n-2} a_j b_{n+m-1-j} + a_{n-1}b_m + a_nb_{m-1} + \sum_{j=n+1}^{n+m-1} a_j b_{n+m-1-j}]x^{n+m-1} = [a_{n-1}b_m+a_nb_{m-1}]x^{n+m-1}$$

3) Ohne das Ergänzen mit „Nullen" nach (*) gilt: $f\cdot g = \sum_{i=0}^{n+m}(\sum_{\substack{j+k=i\\ j\le n,\, k\le m}} a_jb_k)x^i$.

- assoziativ:

nicht verlangt!

für $f,g,h \in R[x]$ mit $f=\sum_{i=0}^{n} a_ix^i$, $g=\sum_{i=0}^{m} b_ix^i$, $h=\sum_{i=0}^{p} c_ix^i$; $a_i,b_i,c_i\in R$ gilt:

$$\underline{(f\cdot g)\cdot h} = [(\sum_{i=0}^n a_ix^i)(\sum_{i=0}^m b_ix^i)]\cdot(\sum_{i=0}^p c_ix^i) = [\sum_{i=0}^{n+m} \underbrace{(\sum_{j+k=i} a_jb_k)}_{=:d_i} x^i]\cdot(\sum_{i=0}^p c_ix^i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n+m+p}(\sum_{q+\ell=i} d_q c_\ell)x^i = \sum_{i=0}^{n+m+p}[\sum_{q+\ell=i}(\sum_{j+k=q} a_jb_k)c_\ell]x^i = \underline{\sum_{i=0}^{n+m+p}(\sum_{j+k+\ell=i} a_jb_kc_\ell)x^i}$$

$$\underline{f\cdot(g\cdot h)} = (\sum_{i=0}^n a_ix^i)[(\sum_{i=0}^m b_ix^i)\cdot(\sum_{i=0}^p c_ix^i)] = (\sum_{i=0}^n a_ix^i)[\sum_{i=0}^{m+p}\underbrace{(\sum_{k+\ell=i} b_kc_\ell)}_{=e_i}x^i] =$$

gl.

$$= \sum_{i=0}^{n+m+p}(\sum_{j+q=i} a_j e_q)x^i = \sum_{i=0}^{n+m+p}[\sum_{j+q=i} a_j(\sum_{k+\ell=q} b_kc_\ell)]x^i = \underline{\sum_{i=0}^{n+m+p}(\sum_{j+k+\ell=i} a_jb_kc_\ell)x^i}$$

Bemerkung: 1) Es reicht nicht zu zeigen, dass

$(f(x)\cdot g(x))\cdot h(x) = f(x)\cdot(g(x)\cdot h(x))$ $\forall x\in R$ in $(R,\cdot)$ trivial gilt!, z.B.

In $R=(\mathbb{Z}_2,\oplus_2,\odot_2)$ gilt für die Polynome $p=0$ und $q=x+x^2$:

$p(x)=q(x)$ $\forall x\in\mathbb{Z}_2$ aber $p\neq q$! x ist nur ein formales Symbol.

2) Einfacher ohne Cauchy Produkt: $(f\cdot g)\cdot h = [(\sum_{i=0}^n a_ix^i)(\sum_{j=0}^m b_jx^j)]\cdot(\sum_{k=0}^p c_kx^k) =$

$$=[\sum_{i=0}^n\sum_{j=0}^m a_ib_jx^{i+j}](\sum_{k=0}^p c_kx^k) = \sum_{i=0}^n\sum_{j=0}^m\sum_{k=0}^p a_ib_jc_kx^{i+j+k} = \dots = f\cdot(g\cdot h)$$

• $(R[x],+,\cdot)$ ist distributiv $\forall f,g,h\in R[x]$ (wie oben) gilt

• mit $q=\max(m,p)$ (setze $b_i=0$ für $m<i\le q$ und $c_i=0$ für $p<i\le q$)

$$f\cdot(g+h) = \left(\sum_{i=0}^n a_i x^i\right)\left[\sum_{i=0}^m b_i x^i + \sum_{i=0}^p c_i x^i\right] = \left(\sum_{i=0}^n a_i x^i\right)\left(\sum_{i=0}^q (b_i+c_i)x^i\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n+q}\left(\sum_{j+k=i} a_j(b_k+c_k)\right)x^i = \underline{\sum_{i=0}^{n+q}\left(\sum_{j+k=i}(a_jb_k+a_jc_k)\right)x^i}$$

und analog (*) (setze $b_i=0$ für $m<i\le q$ und $c_i=0$ für $p<i\le q$)

$$f\cdot g+f\cdot h = \left(\sum_{i=0}^n a_ix^i\right)\left(\sum_{i=0}^m b_ix^i\right)+\left(\sum_{i=0}^n a_ix^i\right)\left(\sum_{i=0}^p c_ix^i\right) =$$ Summation bis q statt bis m bzw p!

$$= \sum_{i=0}^{n+q}\left(\sum_{j+k=i} a_jb_k\right)x^i + \sum_{i=0}^{n+q}\left(\sum_{j+k=i}a_jc_k\right)x^i = \underline{\sum_{i=0}^{n+q}\left(\sum_{j+k=i}(a_jb_k+a_jc_k)\right)x^i}$$ good.

analog (*)

• mit $q=\max(n,m)$ analog:

$$(f+g)\cdot h = \left[\sum_{i=0}^q a_ix^i + \sum_{i=0}^q b_ix^i\right]\left(\sum_{i=0}^p c_ix^i\right) = \sum_{i=0}^{q+p}\left(\sum_{j+k=i}(a_j+b_j)c_k\right)x^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{q+p}\left(\sum_{j+k=i}a_jc_k\right)x^i+\sum_{i=0}^{q+p}\left(\sum_{j+k=i}b_jc_k\right)x^i = \left(\sum_{i=0}^q a_ix^i\right)\left(\sum_{i=0}^p c_ix^i\right)+\left(\sum_{i=0}^q b_ix^i\right)\left(\sum_{i=0}^p c_ix^i\right) = f\cdot h+g\cdot h$$

H 44. Eingeschränkter Taschenrechner

Sie haben sich einen neuen Taschenrechner gekauft, der auch mit komplexen Zahlen rechnen kann. Er kann addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren (natürlich nicht durch 0). Er hat auch eine Taste für die Exponentialfunktion. Leider stellen Sie zu Hause fest, dass der Rechner keine Tasten für sin, cos und tan besitzt.

Wie können sie dennoch mit ihrem Taschenrechner die Werte von $sin(x)$, $cos(x)$, $tan(x)$ für gegebenes x bestimmen?

Aus $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi \Rightarrow \begin{cases}\cos\varphi = \frac12(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})\\ \sin\varphi=\frac{1}{2i}(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}) = \frac{i}{2}(e^{-i\varphi}-e^{i\varphi})\end{cases} \Rightarrow$

$$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = i\cdot\frac{e^{-i\varphi}-e^{i\varphi}}{e^{-i\varphi}+e^{i\varphi}}$$

Wir setzen voraus, dass unser Taschenrechner einen Speicher M besitzt.

Dann lässt sich $e^{i\varphi}$ durch folgende Tastenkombination berechnen:

Eingabe x → (*) → Eingabe i → (=) → (exp) → (MS) → (C) nur Anzeige.

• Eingabe 1 → (/) → (MR) → (=) → (+) → (MR) → (=) → (/) → Eingabe 2 → (=) → Wert <u>cos x</u>

• Eingabe 1 → (/) → (MR) → (=) → (−) → (MR) → (=) → (/) → Eingabe 2 → (=) → (*) → Eingabe i → (=) → Wert <u>sin x</u>

• Entsprechend für $\tan\varphi$

H 43. Sehr komplex.

1. Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\frac{2+i}{3+4i}, \quad \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4, \quad \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{10}, \quad \frac{(2-2i)(1+3i)+(1+i)(2+3i)}{(3+i)(1-i)+(2-i)(1+3i)}.$$

2. Bestimmen Sie alle $n \in \mathbb{N}$, für die gilt: $(1+i)^n + (1-i)^n = 0$.

1) • $\frac{2+i}{3+4i} = \frac{2+i}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i} \overset{(i^2=-1)}{=} \frac{6-8i+3i+4}{9+16} = \frac{10}{25} - \frac{5}{25}i = \underline{\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i}$

• 1. Weg über Polardarstellung

$\frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot i = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4 = \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4 = e^{i\pi} = \underline{\underline{-1}}$

2. Weg direkt mit Binomischen Formeln

$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4 = \frac{1}{4}\cdot(1+i)^2\cdot(1+i)^2 = \frac{1}{4}\left[(1+i)^2\right]^2 = \frac{1}{4}(1+2i-1)^2 = \frac{1}{4}(2i)^2 = i^2 = \underline{\underline{-1}}$

3. Weg in Gaußscher Zahlenebene, siehe unten!

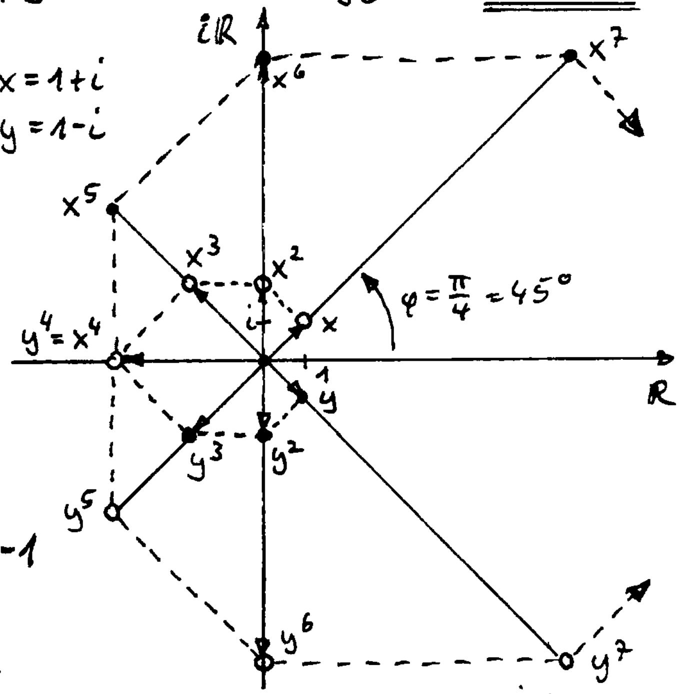
• $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{10} = \left[\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right]^{10} = \left(\frac{1+2i-1}{2}\right)^{10} = i^{10} = \underline{\underline{-1}}$, siehe auch unten!

• $\frac{(2-2i)(1+3i)+(1+i)(2+3i)}{(3+i)(1-i)+(2-i)(1+3i)} = \frac{2+6i-2i+6+2+3i+2i-3}{3-3i+i+1+2+6i-i+3} =$

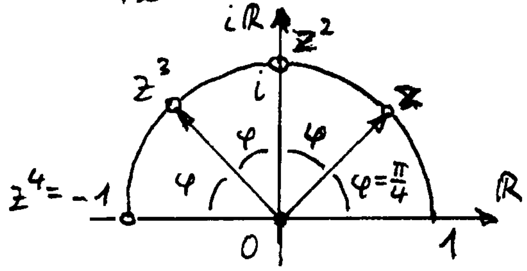
$= \frac{7+9i}{9+3i} = \frac{7+9i}{9+3i}\cdot\frac{9-3i}{9-3i} = \frac{63-21i+81i+27}{81+9} = \frac{90+60i}{90} = \underline{\underline{1+\frac{2}{3}i}}$

Visualisierung in Gaußscher-Zahlenebene $\mathbb{C} = \mathbb{R}\times i\mathbb{R}$

$x = 1+i$
$y = 1-i$



• $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \Rightarrow z^4 = -1$



• $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{10} = \left(\frac{x}{y}\right)^{10} = \left[\left(\frac{x}{y}\right)^4\right]^2\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^2 = 1\cdot(-1) = -1$

2) $1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$

$1-i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$ Beachte: $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$ und

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ und $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

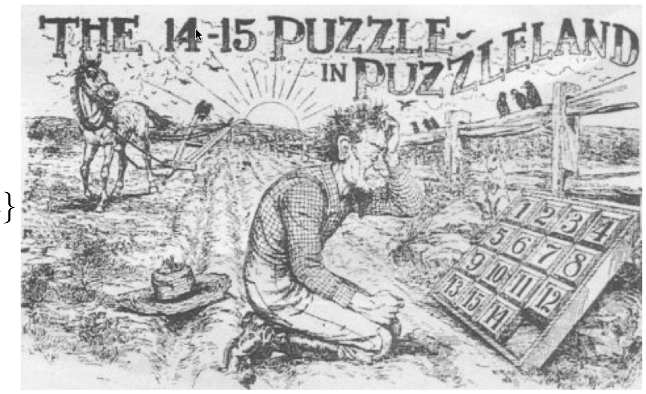
$\Rightarrow (1+i)^n + (1-i)^n = \left(\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n + \left(\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(e^{i\frac{n\pi}{4}} + e^{-i\frac{n\pi}{4}}\right) =$

$= 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{n\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{n\pi}{4}\right)\right) = 2\cdot 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4} \overset{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow \frac{n\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \underline{\underline{n = 4\cdot k + 2,\ k\in\mathbb{Z}}}$ (Nebenklasse von $\mathbb{Z}$ zu Untergruppe $4\cdot\mathbb{Z}$)

Aufgabe 45. Puzzlespaß

Gelingt es dieses Puzzle zu lösen, d.h. durch Verschieben des Loches horizontal oder vertikal die Zahlen in richtiger Reihenfolge zu ordnen? ... und wieso bzw. wieso nicht?



Hinweis: Betrachten Sie
$E_{16} := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, Loch\}$
und jede Puzzlekonfiguration als ein Element
$f : E_n \to E_n \in S_{16}$. Jeder Spielzug führt Sie so zu einer neuen Konfiguration und damit zu einem anderen Element aus S_{16}. Helfen Ihnen Transpositionen weiter?

<u>LÖSUNG:</u>

Wir fassen alle möglichen Positionen der Puzzleteile als Elemente der S_{16} auf. Dabei bekommt das "Loch" die Nummer 16. Jedes Verschieben der Elemente entspricht einer Transposition des "Loches", also des Elementes mit Nummer 16 mit einem anderen Element. Bei der Startposition befindet sich das Feld Nummer 16 in der rechten unteren Ecke. In der gewünschten Endposition soll sich Feld 16 wieder in der rechten unteren Ecke befinden. Dazu ist immer eine gerade Anzahl von Zügen nötig: Jeder Zug schiebt das freie Feld entweder nach links, nach rechts, nach oben oder nach unten. Wenn also das freie Feld am Ende wieder da sein soll, wo es am Anfang gewesen ist, muss es genauso viele Züge nach rechts gegeben haben wie es Züge nach links gegeben hat, und es muss genauso viele Züge nach unten gegeben haben wie es Züge nach oben gegeben hat. Dies bedeutet: Um von der Start- zur Endposition zu gelangen ist immer eine *gerade* Anzahl von Transpositionen notwendig. Nun hat aber die Permutation $\pi \in S_{16}$, die zur Startposition gehört, genau einen Fehlstand und somit ist $sign(\pi) = -1$. Die Permutation, die zur Endposition gehört, ist die Identität, und es gilt $sign(id) = 1$. Durch Verknüpfung der Permutation π mit einer notwendig *geraden* Anzahl von Transpositionen kann aber niemals die Identität erreicht werden.

Alternative Lösung: Für eine gegebene Puzzlekonfiguration sei $a_1, a_2, \dots, a_{15}$ die Liste der Puzzleteile von links oben nach rechts unten zeilenweise abgelesen. Dann bezeichne F die Anzahl aller Fehlstände in dieser Folge $a_1, a_2, \dots, a_{15}$. Sei Z die Zeilennummer des "Loches".

Dann gilt: $N := (F + Z) \mod 2$ bleibt bei jeder gültigen Verschiebung gleich.

x	x	x	x
x	a	b	c
d		x	x
x	x	x	x

Beweis: Eine horizontale Verschiebung des Lochs ändert N offensichtlich nicht. Darum müssen wir nur vertikale Verschiebungen betrachten.
Im Bild wird deutlich, dass eine Verschiebung von a nach unten folgenden Einfluss auf N hat: Z wird um eins größer. Die Verschiebung betrifft nur die relativen Positionen der Elemente a, b, c, d. Wenn a keinen Fehlstand mit b, c, d verursacht hatte (d.h. $a < b, c, d$), dann gibt es nach der Verschiebung zusätzliche drei Fehlstände (ungerade Anzahl). Wenn eines der drei Elemente b, c, d kleiner als a ist, dann gab es vor der Verschiebung einen Fehlstand von b, c, d bezüglich a. Nach der Verschiebung sind es zwei, also eine Veränderung um eins (ungerade).
Die beiden anderen möglichen Fälle (ursprünglich zwei oder drei Fehlstände) führen zum selben Ergebnis: die Anzahl der Fehlstände ändern sich um eine *ungerade* Zahl.
Somit ändert sich die Summe $F + Z$ nur um eine gerade Zahl, und $N = (F + Z) \mod 2$ bleibt unverändert.
Die Puzzlekonfiguration im Comic hat aber $N = 1 + 4 = 5 \equiv 1 \mod 2$, die gesuchte Puzzlekonfiguration hat $N = 0 + 4 = 4 \equiv 0 \mod 2$, also kann man nicht von der einen zur anderen durch legale Verschiebungen gelangen.