TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR.DR. JÜRGEN RICHTER-GEBERT, DR. HERMANN VOGEL

Lineare Algebra und analytische Geometrie 1 & Mathematik für Physiker 1 (WS 2007/08)
— Aufgabenblatt 05 (26. November 2007) —

— Präsenzaufgaben —

P 39. Ist $(R, \oplus, \odot)$ ein Ring, M eine beliebige nichtleere Menge und S = Abb $(M; R)$ die Menge aller Abbildungen von M nach R, so ist auf S durch

$$(f+g)(m) := f(m) \oplus g(m), \qquad (f \cdot g)(m) := f(m) \odot g(m),$$

eine Addition und eine Multiplikation erklärt.

1. Zeigen Sie, dass $(S, +, \cdot)$ auf diese Weise zu einem Ring wird.
2. Ist S ein Körper, falls R ein Körper ist?

P 40. Darstellungsformen komplexer Zahlen
Eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ lässt sich darstellen

- in *Normalform* oder *kartesischer Form* : $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$
- in *trigonometrischer Form*: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ mit $r, \varphi \in \mathbb{R}$
- in *Exponentialform*: $z = re^{i\varphi}$ mit $r, \varphi \in \mathbb{R}$

Das Tupel (a, b) beschreibt die *kartesischen Koordinaten* der komplexen Zahl z in der *Gaußschen Zahlenebene* $\mathbb{R} \times i\mathbb{R}$. Das Tupel (r, φ) gibt die komplexe Zahl z in *Polarform* an, wobei $r \in \mathbb{R}^+$ und φ aus einem Intervall der Länge 2π gewählt werden können.

1. Wie lassen sich kartesische Form und Polarform einer komplexen Zahl ineinander umrechnen ?
2. Geben Sie folgende komplexe Zahlen in allen drei möglichen Darstellungsformen an:

   a) $2e^{i\frac{2}{3}\pi}$ b) $3 + 4i$ c) $-(\sqrt{5}+1) - i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$
3. Welche Vorteile haben die verschiedenen Darstellungen beim Rechnen mit komplexen Zahlen ?

P 41. Rechnen wie verhext mit konjugiert komplex
Es sei $z = a + bi \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Die zu z konjugierte Zahl $\overline{z}$ ist $\overline{z} = a - bi$. Der Realteil $\mathrm{Re}(z)$ von z ist a, und der Imaginärteil $\mathrm{Im}(z)$ von z ist b. Die Länge $|z|$ von z ist $\sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$.

1. Bestimmen Sie $\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)$ und $|z|$ in Abhängigkeit von z und $\overline{z}$.
2. Überprüfen Sie die beiden Rechenregeln: Für alle $x, y \in \mathbb{C}$ gilt: a) $\overline{x} + \overline{y} = \overline{x+y}$, b) $\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{x \cdot y}$.
3. Beweisen Sie, dass eine komplexe Zahl z genau dann reell ist, wenn $z = \overline{z}$ gilt.
4. Es sei $p \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom in X vom Grad $n \in \mathbb{N}$.

   Man zeige: Ist $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p, dann ist auch $\overline{z}$ eine Nullstelle von p.

— *Informationen* —

- Am Donnerstag den 6.12.07 entfallen die Übungen wegen des Dies Academicus. Daher wird statt der Zentralübung am Montag den 3.12.07 eine Ersatzübung für die ausfallenden Übungen angeboten. Die übrigen Übungsgruppen finden wie gewohnt statt.
- Der Klausurtermin für Lineare Algebra 1 ist auf Montag den 18. Februar 2008 von 13-15 Uhr festgelegt.
  Für Hörer höherer Semester wird zum Erwerb der Zulassung zur Diplomvorprüfung eine gesonderte Prüfung in der letzten Semesterwoche stattfinden.

— *Hausaufgaben* —

H 42. Polynomring

Sei $(R,+,\cdot)$ ein Ring und $R[x] := \left\{ \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\,,\, a_i \in R \right\}$ die Menge der Polynome in x mit Koeffizienten aus R. Den höchsten Exponenten eines Polynoms $p(x)$ mit nicht verschwindendem Koeffizienten nennt man $grad(p)$ und identifiziert für $n < m$: $\quad a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + a_{n+1}x^{n+1} + \cdots + a_mx^m \;\wedge\; a_{n+1} = \cdots = a_m = 0$ mit $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$.

Zeigen Sie, dass $(R[x],+,\cdot)$ bezüglich der üblichen Addition und Multiplikation von Polynomen ein Ring ist.

Hinweis: Der explizite Nachweis der Assoziativität der Multiplikation darf weggelassen werden.

H 43. Sehr komplex.

1. Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$:
$$\frac{2+i}{3+4i}, \quad \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4, \quad \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{10}, \quad \frac{(2-2i)(1+3i)+(1+i)(2+3i)}{(3+i)(1-i)+(2-i)(1+3i)}.$$
2. Bestimmen Sie alle $n \in \mathbb{N}$, für die gilt: $\quad (1+i)^n + (1-i)^n = 0$.

H 44. Eingeschränkter Taschenrechner

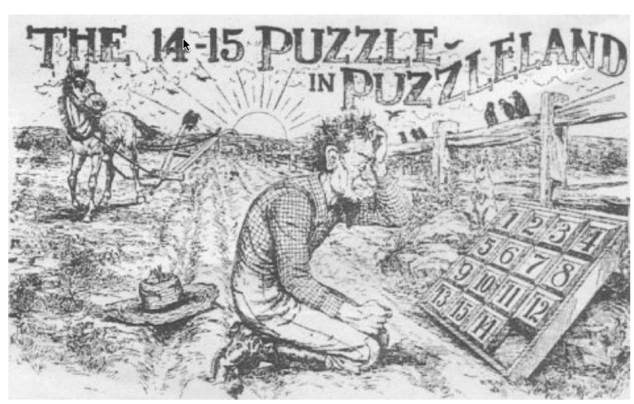
Sie haben sich einen neuen Taschenrechner gekauft, der auch mit komplexen Zahlen rechnen kann. Er kann addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren (natürlich nicht durch 0). Er hat auch eine Taste für die Exponentialfunktion. Leider stellen Sie zu Hause fest, dass der Rechner keine Tasten für sin, cos und tan besitzt.

Wie können sie dennoch mit ihrem Taschenrechner die Werte von $sin(x)$, $cos(x)$, $tan(x)$ für gegebenes x bestimmen?

H 45. Puzzlespaß

Gelingt es dieses Puzzle zu lösen, d.h. durch Verschieben des Loches horizontal oder vertikal die Zahlen in richtiger Reihenfolge zu ordnen? ... und wieso bzw. wieso nicht?

Hinweis: Betrachten Sie $E_{16} := \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,Loch\}$ und jede Puzzlekonfiguration als ein Element $f : E_n \rightarrow E_n \in S_{16}$. Jeder Spielzug führt Sie so zu einer neuen Konfiguration und damit zu einem anderen Element aus S_{16}. Helfen Ihnen Transpositionen weiter?



Abgabetermin ist der 10.12.2007 bis 12:00 Uhr (Einwurfkasten im Untergeschoss des FMI-Gebäudes).