TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR.DR. JÜRGEN RICHTER-GEBERT, DR. HERMANN VOGEL

Lineare Algebra und analytische Geometrie 1 & Mathematik für Physiker 1 (WS 2007/08)
— Aufgabenblatt 04 (19. November 2007) —

— Präsenzaufgaben —

P 31. Werteschreibweise versus Zykelschreibweise
Sei $n \in \mathbb{N}$ und $E_n := \{1, \ldots, n\}$. Die symmetrische Gruppe $(S_n, \circ)$ ist gegeben als Menge der Permutationen: $S_n := \{f : E_n \to E_n \mid f \text{ bijektiv }\}$ zusammen mit der Komposition (Hintereinanderausführung) $\circ$ als Verknüpfung. Die Komposition $(f \circ g)(x) := f(g(x)), x \in E_n$ wird auch als Produkt der beiden Permutationen bezeichnet und man setzt: $g^k := \underbrace{g \circ g \circ \ldots \circ g}_{k \text{ mal}}$.

Die Elemente $f \in S_n$ lassen sich darstellen in **Werteschreibweise** als: $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ f(1) & f(2) & \ldots & f(n) \end{pmatrix}$ oder als **Produkt von Zykeln**, wobei ein k–Zykel $(x_1 x_2 \ldots x_k), k \leq n$ diejenige Permutation $g \in S_n$ ist mit $g(x_1) = x_2,\ g(x_2) = x_3,\ \ldots,\ g(x_{k-1}) = x_k,\ g(x_k) = x_1$ sowie $g(x) = x\ \forall x \in E_n \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$.

Sei nun $f \in S_8$ in Zykelschreibweise als $f = (1\ 3\ 6) \circ (5\ 2\ 3) \circ (6\ 1) \circ (8\ 3\ 4) \circ (1\ 7)$ gegeben.

1. Geben Sie für f das Ergebnis in Werteschreibweise an.
2. Zwei Zykel $(x_1\ x_2 \ldots x_k),\ (y_1\ y_2 \ldots y_l)$ heißen elementfremd, wenn $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \cap \{y_1, y_2, \ldots, y_l\} = \emptyset$. Geben Sie ein Verfahren an, wie man von der Werteschreibweise einer Permutation auf eine elementfremde Zykelschreibweise kommt. Lassen sich elementfremde Zykel vertauschen ?
   Geben Sie das Ergebnis von f als Produkt elementfremder Zykel an.
3. Zeigen Sie : Für einen k–Zykel g gilt $g^k = id$ und $\forall j < k : g^j \neq id.$ Bestimmen Sie damit f^{2007}.
4. Stellen Sie f als Produkt von 2–Zykeln (Transpositionen) dar und bestimmen Sie das Signum von f.

P 32. Seien $\pi_1, \pi_2 \in S_6$ mit $\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ und $\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

a) Berechnen Sie $\pi_2 \circ \pi_1,\ \pi_1^{-1},\ \pi_2^{-1},\ \pi_2^{27},\ \pi_1^8$ und geben Sie das Ergebnis in Werte- und Zykelschreibweise an.

b) Finden Sie die Lösungen $x \in S_6$ der Gleichung $\pi_1 \circ x \circ \pi_2 = \pi_2 \circ \pi_1$.

P 33. Gruppe der Einheiten
Seien $(R, \oplus, \odot)$ ein Ring mit Einselement und $M \subseteq R$ die Menge aller invertierbaren Elemente von R bezüglich der Multiplikation $\odot$.

1. Zeigen Sie, dass $(M, \odot)$ eine Gruppe (die *Einheitengruppe* von R) ist. Ist $(M, \oplus, \odot)$ ein Körper ?
2. Bestimmen Sie die Einheitengruppe von $\mathbb{Z}_{10}$.

— Zentrale Präsenzaufgaben —

Z 34. Nebenklassen, Quotientengruppe, Isomorphie und Äquivalenz
Gegeben sei die Abbildung $f : \mathbb{Z}_{12} \longrightarrow \mathbb{Z}_3$ mit $x \mapsto x \mod 3$ zwischen den Gruppen $(\mathbb{Z}_{12}, \oplus_{12})$ und $(\mathbb{Z}_3, \oplus_3)$.

1. Zeigen Sie, dass f ein Epimorphismus ist, und geben Sie $Kern(f)$ an.
2. Geben Sie die Elemente von $\mathbb{Z}_{12}/Kern(f)$ an. Um welche Mengen handelt es sich dabei?
3. Beweisen Sie, dass $\mathbb{Z}_{12}/Kern(f)$ isomorph zu $\mathbb{Z}_3$ ist $(\mathbb{Z}_{12}/Kern(f) \cong \mathbb{Z}_3)$.
4. Zeigen Sie, dass $a \sim b :\leftrightarrow a \ominus_{12} b \in Kern(f)$ auf $\mathbb{Z}_{12}$ eine Äquivalenzrelation definiert.
5. Zeigen Sie: $[a]_\sim = [a]_{Kern(f)}, \forall a \in \mathbb{Z}_{12}$.

— Hausaufgaben —

H 35. Transpositionen tun sich zusammen: Gemeinsam sind wir stark.
Gegeben sei die Permutation

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 8 & 1 & 9 & 2 & 10 & 3 & 11 & 4 & 12 & 5 & 13 & 6 & 14 & 7 \end{pmatrix} \in \mathsf{S}_{14}.$$

1.) Schreiben Sie π als Produkt von paarweise elementfremden Zyklen.

2.) Stellen Sie π als Produkt von Transpositionen dar.

3.) Welches Signum besitzt π?

4.) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Stellen Sie den Zykel $(1\ 2\ 3 \ldots n) \in \mathsf{S}_n$ als Produkt von Transpositionen dar.
Welches Signum hat $(1\ 2\ 3 \ldots n)$?

H 36. Klein ist fein.
Gegeben sei die Teilmenge

$$\mathsf{V}_4 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathsf{S}_4.$$

Zeigen Sie:

- V_4 ist eine Untergruppe von S_4.
- V_4 ist isomorph zur Gruppe derjenigen Drehbewegungen, die einen Ziegelstein mit unterschiedlicher Länge, Breite und Höhe deckungsgleich auf sich selbst abbilden.

V_4 heißt KLEINsche Vierergruppe und ist bis auf Isomorphie die einzige nichtzyklische Gruppe mit vier Elementen.

H 37. Andere Ringe als $\mathbb{Z}$

1. Geben Sie einen Ring ohne Eins an.
2. Geben Sie einen Ring mit Nullteilern an.

Begründen Sie kurz, warum Ihr Beispiel ein Ring ist.

H 38. Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle Körper mit 3 bzw. 4 Elementen.

Abgabetermin ist der 03.12.2007 bis 12:00 Uhr (Einwurfkasten im Untergeschoss des FMI-Gebäudes).