Aufgabe 27. Was bin ich?

Welche der angegebenen Abbildungen sind Gruppenhomomorphismen und sogar Gruppenisomorphismen?

$G = (\mathbb{Z}, +), H = (2\mathbb{Z}, +)\,;\ f : G \to H,\ x \mapsto 4x;$	$G = H = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +); f : G \to H\,,\ x \mapsto x^2$
$G = H = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)\,; f : G \to H\,,\ x \mapsto x + x;$	$G = H = (\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot); f : G \to H\,,\ x \to x^n,\ (n \in \mathbb{N})$
$G = H = (\mathbb{R}, +);\ f : G \to H\,,\ x \mapsto x^2$	$G = (\mathbb{R}, +), H = (\mathbb{Z}, +)\,; f : G \to H\,,\ x \to round(x)$

Hinweis: Bei $f(x) = x^2$ nehmen Sie bitte die übliche multiplikative Struktur von H zu Hilfe.

LÖSUNG:

Ein Gruppenhomomorphismus $f : G \mapsto H$ zwischen zwei Gruppen $(G, \circ_G)$ und $(H, \circ_H)$ ist eine strukturerhaltende Abbildung, d.h. für alle $x, y \in G$ gilt $f(x \circ_G y) = f(x) \circ_H f(y)$.
Ist ein Gruppenhomomorphismus f zusätzlich noch bijektiv (injektiv und surjektiv), dann ist f ein Gruppenisomorphismus.

☒ ☐ $G = (\mathbb{Z}, +), H = (2\mathbb{Z}, +)\,;\ f : G \to H,\ x \mapsto 4x$
Die Funktion f ist strukturerhaltend, denn für alle $x, y \in G = \mathbb{Z}$ gilt:
$f(x + y) = 4(x + y) = 4x + 4y = f(x) + f(y)$. Damit ist f ist ein Gruppenhomomorphismus.
Die Funktion f ist injektiv, denn für alle $x, y \in G = \mathbb{Z}$ gilt: $f(x) = f(y) \Longleftrightarrow 4x = 4y \Longleftrightarrow x = y$.
Die Funktion f ist aber nicht surjektiv, denn beispielsweise gibt es für den Funktionswert $y = 2 \in H = 2\mathbb{Z}$ kein $x \in G = \mathbb{Z}$ mit $4x = 2$. Damit ist f kein Gruppenisomorphismus.

☒ ☐ $G = H = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)\,; f : G \to H\,,\ x \mapsto x + x$
Die Abbildung f ist strukturerhaltend, denn für alle Nebenklassen $[x], [y] \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ gilt:
$f([x] + [y]) = ([x] + [y]) + ([x] + [y]) = ([x] + [x]) + ([y] + [y]) = f([x]) + f([y])$
Die Abbildung f ist nicht surjektiv: Betrachte z.B. die Bilder von $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{[0], [1], [2], [3]\}$:
$f([0]) = [0]+[0] = [0], f([1]) = [1]+[1] = [2], f([2]) = [2]+[2] = [4] = [0], f([3]) = [3]+[3] = [6] = [2].$
Somit gibt es für $[3] \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ kein $[x] \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ mit$f([x]) = [x] + [x] = [3]$.
Anmerkung: Hier gilt: $Bild(f) = \{[0], [2]\} = Kern(f)$.
Die Abbildung f ist wegen $f([0]) = [0] = f([2])$ auch nicht injektiv.

☐ ☐ $G = H = (\mathbb{R}, +);\ f : G \to H\,,\ x \mapsto x^2$
Die Abbildung f ist nicht strukturerhaltend, denn für beliebige $x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gilt:
$f(x + y) = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \neq x^2 + y^2 = f(x) + f(y)$.
Insbesondere ist $f(1 + 1) = 4 \neq 2 = f(1) + f(1)$.
Die Abbildung f ist weder injektiv ($f(-1) = f(1) = 1$) noch surjektiv ($f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$).

☒ ☒ $G = H = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +); f : G \to H\,,\ x \mapsto x^2$.
Für alle $x \in \{[0], [1]\}$ gilt: $x^2 = x \cdot x = x$. Also ist f die Identität, die stets ein Gruppenisomorphismus ist.

☒ ☒ / ☒ ☐ $G = H = (\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot); f : G \to H\,,\ x \to x^n,\ (n \in \mathbb{N})$
Die Abbildung f ist strukturerhaltend, da für alle $x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gilt:
$f(x, y) = (x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n = f(x) \cdot f(y)$.
Für $n \in 2\mathbb{N}$ ist f wegen $f(-x) = x^2 = f(x)$ nicht injektiv, also nur ein Gruppenhomomorphismus.
Für $n \in 2\mathbb{N} + 1$ ist f injektiv und surjektiv und damit ein Gruppenisomorphismus.

☐ ☐ $G = \mathbb{R}, H = \mathbb{Z}\,; f : G \to H\,,\ x \to round(x)$
Die Abbildung f ist kein Homomorphismus, da für $round(1.4) = 1$ und $round(1.2) = 1$ gilt
$round(1.4 + 1.2) = round(2.6) = 3$ aber $round(1.4) + round(1.2) = 1 + 1 = 2 \neq 3$.
f ist surjektiv, da $\forall x \in \mathbb{Z} : f(x) = x \in \mathbb{Z}$. Sie ist aber nicht injektiv, da $f(1.2) = f(1.4) = 1$.

H 28. Sei f ein Gruppenhomomorphismus zwischen den Gruppen $(G, \circ)$ und $(H, \bullet)$.
Zeigen Sie: $Bild(f)$ ist eine Gruppe.

Sei $f: G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus $\Leftrightarrow \forall a, b \in G: f(a \circ b) = f(a) \bullet f(b)$

$Bild(f) = \{ f(g) \in H \mid g \in G \} = \{ h \in H \mid \exists g \in G : f(g) = h \} \subseteq H$ (Teilmenge klar!)

Bleibt zu zeigen: $(Bild(f), \bullet)$ ist eine Untergruppe von H.

<u>Untergruppenkriterium:</u>

(i) Zu $h_1, h_2 \in Bild(f)$ $\exists g_1, g_2 \in G : f(g_1) = h_1,\ f(g_2) = h_2 \Rightarrow$

$h_1 \bullet h_2 = f(g_1) \bullet f(g_2) \overset{(*)}{=} f(g_1 \circ g_2) \in Bild(f)$ (abgeschlossen)

(ii) Zu $h \in Bild(f)$ $\exists g \in G : f(g) = h$

Sei g^{-1} Inverses zu g bzgl. $\circ$ in G und e_G das neutrale Element in G.

$\Rightarrow h = f(g) = f(e_G \circ g) \overset{(*)}{=} f(e_G) \bullet f(g) = f(e_G) \bullet h \Rightarrow f(e_G) = e_H$ und

$e_H = f(e_G) = f(g^{-1} \circ g) \overset{(*)}{=} f(g^{-1}) \bullet f(g) \Rightarrow \underbrace{[f(g)]^{-1}}_{= h^{-1}} = f(g^{-1}) \in Bild(f)$

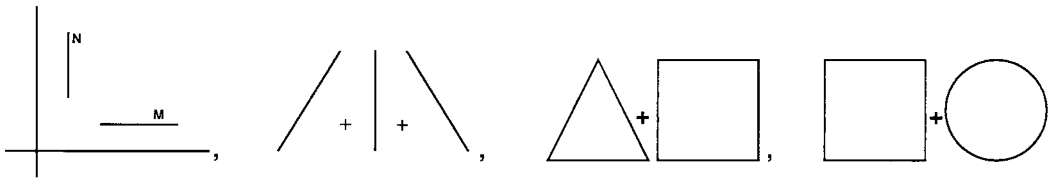
neutrales Element in H. (Inverses Element)

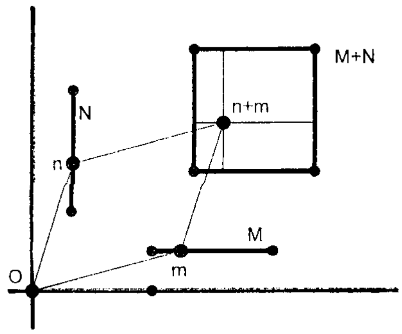
(iii) Wegen $f(e_G) = e_H$ ist $Bild(f)$ nicht leer (nicht leer)

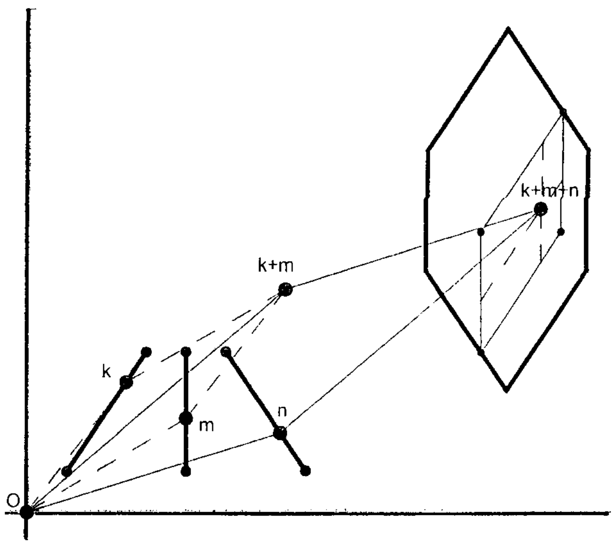
H 29. Minkowski-Summen
Die Minkowski-Summe zweier Teilmengen M und N einer Gruppe $(G, +)$ ist definiert als

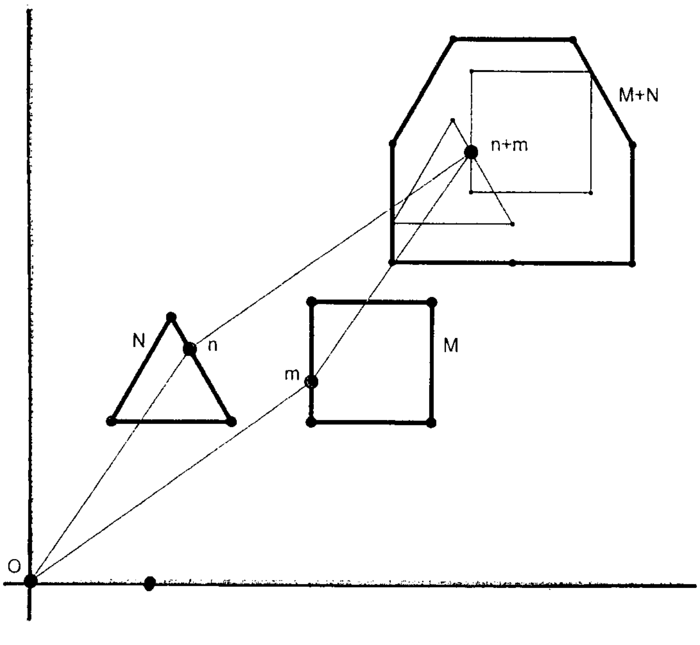
$$M + N = \{m + n \mid m \in M, n \in N\}.$$

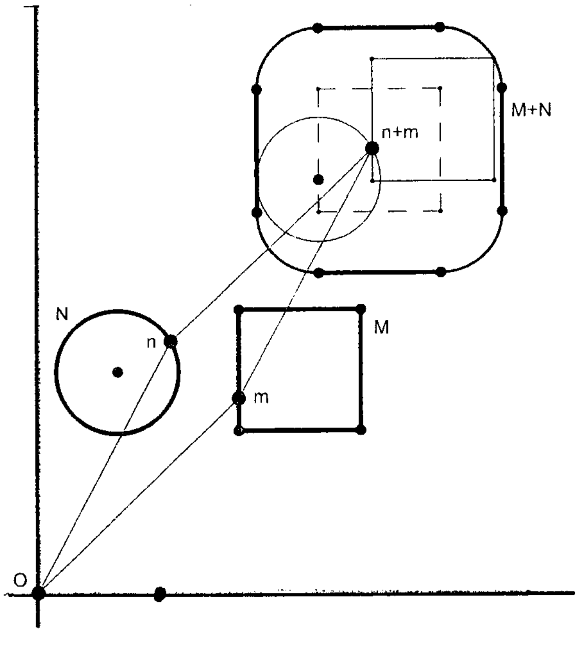
Bestimmen Sie jeweils die Minkowski-Summe der skizzierten Teilmengen des $\mathbb{R}^2$.











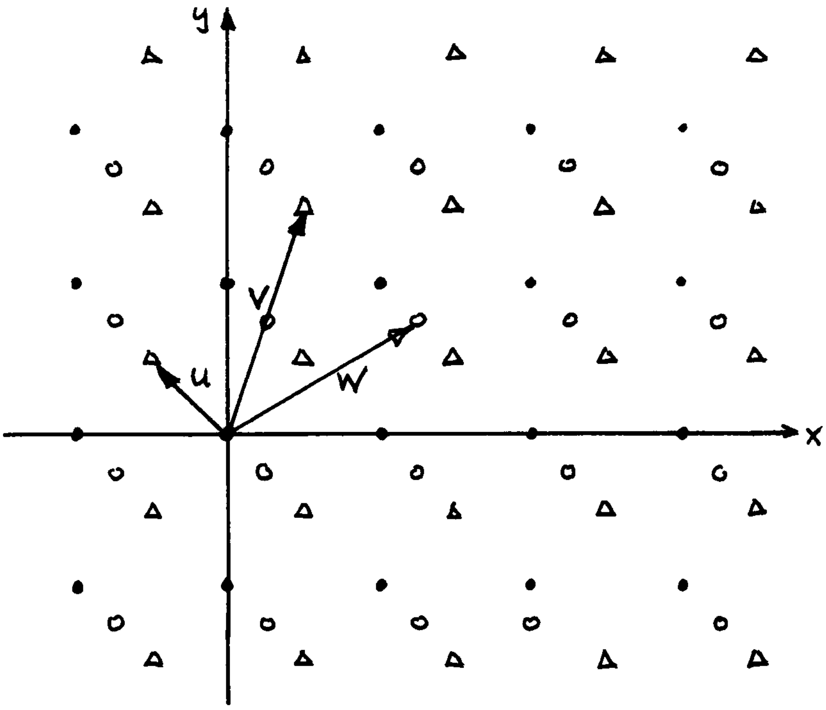
Vgl. auch die interaktiven Figuren auf der LinAlg-Homepage

H 30. Punkteraster

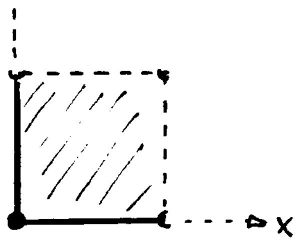
$\mathbb{Z}^2$ ist bezüglich komponentenweiser Addition eine Untergruppe von $\mathbb{R}^2$.

1. Skizzieren Sie einige Nebenklassen von $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.
2. Geben Sie eine möglichst kleine Teilmenge S des Einheitsquadrats $[0,1] \times [0,1]$ an, so dass $\mathbb{R}^2 = S + \mathbb{Z}^2$ ist.

1)



2) z.B. wähle S mit



$S = \{(x,y) \mid 0 \le x < 1,\ 0 \le y < 1\}$

dann gilt: $\mathbb{R}^2 = S + \mathbb{Z}^2$

Punkte von $\mathbb{Z}^2 = \{(m,n) \in \mathbb{R}^2 \mid m,n \in \mathbb{Z}\}$: $\bullet$

Nebenklasse zu $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ aus $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$:

$[v]_{\mathbb{Z}^2} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) = (v_1,v_2) + (m,n) \text{ mit } m,n \in \mathbb{Z}\} = v + \mathbb{Z}^2$

ist das Punktraster, das durch Verschiebung des Punktrasters von $\mathbb{Z}^2$ um v entsteht.

Speziell:

Punkte der Nebenklasse $[(0.5, 1.5)]_{\mathbb{Z}^2}$: $\triangle$ $\quad (v = (0.5, 1.5))$

Punkte der Nebenklasse $[(1.25, 0.75)]_{\mathbb{Z}^2}$: $\circ$ $\quad (w = (1.25, 0.75))$

Es gilt: $[u]_{\mathbb{Z}^2} = [v]_{\mathbb{Z}^2} \Leftrightarrow (u_1,u_2) = (v_1,v_2) + (m,n)$ mit $m,n \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow u - v \in \mathbb{Z}^2$ vgl. $u = (-0.5, 0.5)$