TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR.DR. JÜRGEN RICHTER-GEBERT, DR. HERMANN VOGEL

Lineare Algebra und analytische Geometrie 1 & Mathematik für Physiker 1 (WS 2007/08)
— Aufgabenblatt 03 (12. November 2007) —

— Präsenzaufgaben —

P 22. Untergruppe - Nebenklasse
In der Gruppe $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit der Addition $(v_1, v_2) + (w_1, w_2) := (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$ sei eine skalare Multiplikation definiert durch $\lambda \cdot (v_1, v_2) := (\lambda \cdot v_1, \lambda \cdot v_2)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Zeigen Sie:

1. Für jedes $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist $U_v := \{\lambda \cdot v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ eine Untergruppe von $\mathbb{R}^2$.
2. Skizzieren Sie U_v und einige Nebenklassen aus $\mathbb{R}^2/U_v$ einerseits für $v = (1,0)$, anderserseits für $v = (1,-2)$.

M 23. Zu welchen Gruppen aus Aufgabe P 10 sind folgenden Strukturen isomorph ?

$(\mathbb{Z}_2, \bigoplus_2)$, $\quad(\mathbb{Z}_3\backslash\{0\}, \bigodot_3)$, $\quad(\mathbb{Z}_4\backslash\{0\}, \bigodot_4)$, $\quad(\mathbb{Z}_4, \bigoplus_4)$, $\quad(\mathbb{Z}_5\backslash\{0\}, \bigodot_5)$

P 24. Konjugation ist ein Automorphismus.
Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Für ein Element $a \in G$ definieren wir die Abbildung

$$f_a : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ x & \mapsto & a \circ x \circ a^{-1} \end{array} \right. .$$

Dabei bezeichne a^{-1} das inverse Element zu a in G.

Zeigen Sie, dass f_a ein Gruppenisomorphismus von G ist.

P 25. Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe mit endlich vielen Elementen ($|G| < \infty$) und neutralem Element e.
Die von $A \subseteq G$ ($A \neq \{\}$) **erzeugte Menge** $\langle A \rangle$ ist definiert durch $\langle A \rangle := \{\prod_{i=1}^{n} a_i \mid n \in \mathbb{N}\backslash\{0\} \ \wedge \ a_i \in A\}$.

Zeigen Sie: $\langle A \rangle$ ist die kleinste Untergruppe von G, die A enthält ($A \subseteq \langle A \rangle$), also dass gilt:

a) $\langle A \rangle$ ist Untergruppe von G mit $A \subseteq \langle A \rangle$, (d. h. $A \subseteq \langle A \rangle \leq G$).

b) Ist H Untergruppe von G ($H \leq G$) mit $A \subseteq H \ \Rightarrow \ \langle A \rangle \subseteq H$.

$\langle A \rangle$ heißt die von $A \subseteq G$ **erzeugte Untergruppe**.

Hinweis: Betrachte zunächst die von einem Element a der endlichen Gruppe G erzeugte Menge $\langle \{a\} \rangle = \{a, a^2, a^3, ...\}$ und zeige, dass $a^{|\langle \{a\} \rangle|} = e$. $|\langle \{a\} \rangle|$ nennt man die **Ordnung** von a.

— Zentrale Präsenzaufgaben —

Z 26. In welcher Klasse bin ich?
Es seien M eine Menge und R eine Teilmenge von $M \times M$. Für $(x, y) \in R$ schreiben wir kurz $x \sim y$.
R heißt **Äquivalenzrelation** auf M, wenn gilt:

(1) Für alle $x \in M$ gilt $x \sim x$, d.h. R ist **reflexiv**,
(2) Aus $x \sim y$ folgt $y \sim x$, d.h. R ist **symmetrisch**,
(3) Aus $x \sim y$ und $y \sim x$ folgt $x \sim z$, d.h. R ist **transitiv**.

Zu $x \in M$ heißt die Teilmenge $[x]_R := \{y \in M \mid y \sim x\}$ die **Äquivalenzklasse** von x bezüglich R.

Überprüfen Sie, ob nachstehende Relationen auf M Äquivalenzrelationen auf M sind. Geben Sie gegebenenfalls eine geometrische Beschreibung der Äquivalenzklassen an. In welche Partitionen wird $\mathbb{R}^2$ aufgeteilt?

1. $M := \mathbb{R}^2$, $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) :\Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$
2. $M := \mathbb{R}^2$, $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) :\Leftrightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1$
3. $M := \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$, $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) :\Leftrightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1$

— Hausaufgaben —

H 27. Was bin ich?
Welche der angegebenen Abbildungen sind Gruppenhomomorphismen und sogar Gruppenisomorphismen?

$G = (\mathbb{Z}, +), H = (2\mathbb{Z}, +)\,;\ f : G \to H,\ x \mapsto 4x;$

$G = H = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +); f : G \to H\,,\ x \mapsto x^2$

$G = H = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)\,; f : G \to H\,,\ x \mapsto x + x;$

$G = H = (\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot); f : G \to H\,,\ x \to x^n,\ (n \in \mathbb{N})$

$G = H = (\mathbb{R}, +);\ f : G \to H\,,\ x \mapsto x^2$

$G = (\mathbb{R}, +), H = (\mathbb{Z}, +)\,; f : G \to H\,,\ x \to round(x)$

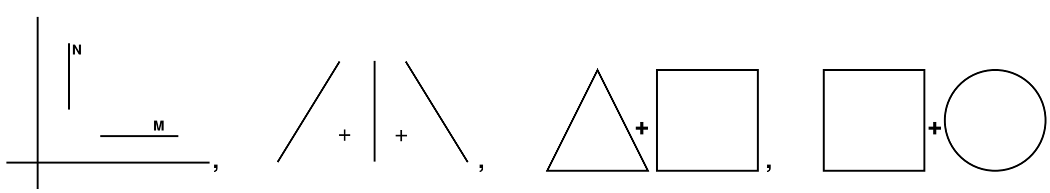
Hinweis: Bei $f(x) = x^2$ nehmen Sie bitte die übliche multiplikative Struktur von H zu Hilfe.

H 28. Sei f ein Gruppenhomomorphismus zwischen den Gruppen $(G, \circ)$ und $(H, \bullet)$.
Zeigen Sie: $Bild(f)$ ist eine Gruppe.

H 29. Minkowski-Summen
Die Minkowski-Summe zweier Teilmengen M und N einer Gruppe $(G, +)$ ist definiert als

$$M + N = \{m + n \mid m \in M, n \in N\}.$$

Bestimmen Sie jeweils die Minkowski-Summe der skizzierten Teilmengen des $\mathbb{R}^2$.



H 30. Punkteraster
$\mathbb{Z}^2$ ist bezüglich komponentenweiser Addition eine Untergruppe von $\mathbb{R}^2$.

1. Skizzieren Sie einige Nebenklassen von $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.
2. Geben Sie eine möglichst kleine Teilmenge S des Einheitsquadrats $[0, 1] \times [0, 1]$ an, so dass $\mathbb{R}^2 = S + \mathbb{Z}^2$ ist.

Abgabetermin ist der 26.11.2007 bis 12:00 Uhr (Einwurfkasten im Untergeschoss des FMI-Gebäudes).